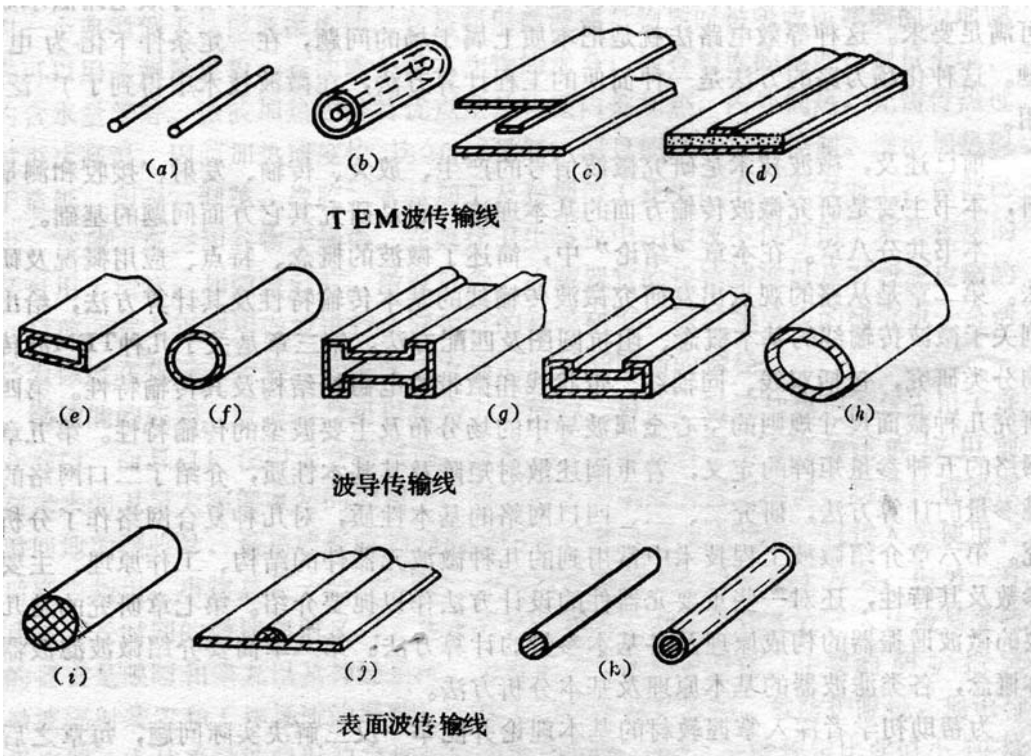
第二章　传输线基本理论

§2-1　引言

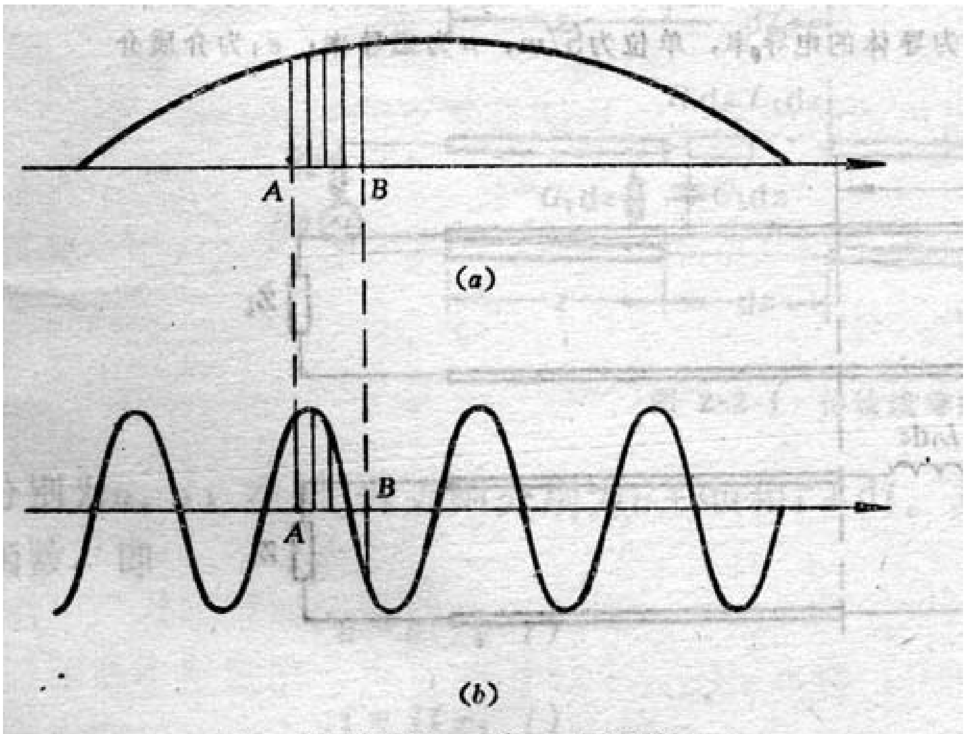
一、传输线的种类用来传输电磁能量的线路称为传输系统，由传输系统引导向一定方向传播的电磁波称为导行波。和低频段不同，微波传输线的种类繁多。按其上传播的导行波的特征可分为三大类：①TEM 波传输线。如平行双线、同轴线以及微带传输线（包括带状线和微带）等；②波导传输线。如矩形波导、圆柱波导、椭圆波导及脊波导等；③表面波传输线。如介质波导、镜像线及单根线等等。各类传输线示于图 2-1-1 中。



微波传输线不仅能将电磁能量由一处传送到另一外，还可以构成各种各样的微波元件，这与低频传输截然不同。不同的频段，可以选不同类型的传输线。对传输线的基本要求是：损耗小、效率高；功率容量大；工作频带宽；尺寸小且均匀。

二、分布参数的概念

“长度”有绝对长度与相对长度两种概念。对于传输线的“长”或“短”，并不是以其绝对长度而是以其与波长比值的相对大小而论的。我们把比值 l/λ 称为传输线的相对长度。在微波领域里，波长 λ 以厘米或毫米计。虽然传输线的长度有时只不过是几十厘米甚至几个毫米，比如传输频率为 3GHz 的同轴电缆虽只有半米长，但它已是工作波长的 5 倍，故须把它称为“长线”；相反，输送市电的电力传输线（频率为 50Hz）即使长度为几千米，但与市电的波长（6000 千米）相比小得多，因此只能称为“短线”而不能称为“长线”。微波传输线都属于“长线”的范畴，故本章又可称作长线的基本理论。



(a) 短线情况；(b) 长线情况

图 2-1-2 电流（电压）沿线分布图

我们用图 2-1-2 所示线上的电压（或电流）随空间位置的分布状况来说明长、短线的区别。图 a 示出的是半波长的波形图，*AB* 是线上的一小段，它比波长小许多倍。由图可见，线段 *AB* 上各点电压（或电流）的大小和相位几乎不变，此时的 *AB* 应视为“短线”。如果频率升高了，虽然线段长仍为 *AB*，但在某一瞬时其上各点电压（或电流）的大小和相位均有很大变化，如图 b 所示，此时线段 *AB* 即应视为“长线”。

前者对应于低频率传输线。它在低频电路中只起连接线的作用，因频率低，其本身分布参数所引起的效应过错全可以忽略不计，所以在低频电路中只考虑时间因子而忽略空间效应，因而把电路当作集中参数电路来处于是允许的。后者对应于微波传输线。因为频率很高时分布参数效应不能再忽视了，传输线不能仅当作连接线，它将形成分布参数电路，参与整个电路的工作。因而传输线在电路中所引起的效应必须用传输线理论来研究。

亦即，在微波传输线上处处存在分布电阻、分布电感，线间处处存在分布电容和漏电电导。我们用 R_1、L_1、G_1、C_1 分别表示传输线单位长度的电阻、电感、电导和电容，它们的数值与传输线截面尺寸、导体材料、填充介质以及工作频率有关。表 2-1-1 列同了平行双导线和同轴线的各分布参数表达式。根据传输线上分布参数的均匀与否，可将传输线分为均匀和不均匀两种。本章讨论的主要是均匀传输线。

对一均匀传输线，由于参数沿线均匀分布，故可任取一小线元 dz 来讨形论。因 dz 很小，故可将它看成一个集总参数电路。用一个Γ（T 或 π 形）四端网络来等效，如图 2-1-3a 所示。于是，整个传输线就可看成是由许多相同线元的四端网络级联而成的电路，如图 2-1-3b 所示。这是有耗传输线的等效电路，对于无耗传输线（即 R_1=G_1=0），其等效电路如图 2-1-3c 所示。

表 2-1-1　　平行双导线和同轴线的分布参数

传输线 参数	双导线	同轴线
L_1(H/m)	$\dfrac{\mu}{\pi}\ln\dfrac{D+\sqrt{D^2-d^2}}{d}$	$\dfrac{\mu}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$
C_1(F/m)	$\dfrac{\pi\varepsilon_1}{\ln\dfrac{D+\sqrt{D^2-d^2}}{d}}$	$\dfrac{2\pi\varepsilon_1}{\ln\dfrac{b}{a}}$
R_1(Ω/m)	$\dfrac{2}{\pi d}\sqrt{\dfrac{\omega\mu}{2\sigma_2}}$	$\sqrt{\dfrac{f\mu}{4\pi\sigma_2}}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$
G_1(S/m)	$\dfrac{\pi\sigma_1}{\ln\dfrac{D+\sqrt{D^2-d^2}}{d}}$	$\dfrac{2\pi\sigma_1}{\ln\dfrac{b}{a}}$

注：σ_1 为导体是介质不理想的漏电电导率；σ_2 为导体的电导率，单位为 S/m；μ 为磁导率；ε_1 为介质介电常数。

有了上述等效电路就容易解释传输线上电压、电流不相同的现象。参

看图 b，由于aa'和bb'这间有患联电阻存在，二处的阻抗不相等，因而两处的电压也不相同；又由线间并联回路的分流作用，通过 a 和 b 点的电流亦不相同。同时还可看出，当接通电流后，电流通过分布电感逐次向分布电容充电形成向负载传输的电压波和电流波。就是说电压和电流是以波的形式在传输线上传播并将能量从电源传至负载。

§2-2　传输线方程

一、传输线方程

表征均匀传输线上电压电流关系的方程式称为传输线方程。该方程最初是在研究电报线上电压电流的变化规律时推导出来的，故又称做“电报方程”。

分析图 2-2-1 所示的微波传输系数。令传输线上距始端为 z 处的瞬时电压、瞬时电流分别为 u 、i ；在 $z+dz$ 处则分别为 $u+du$ 和 $i+di$ 。其中 u 、i 既是空间位置 z 又是时间 t 的函数，即

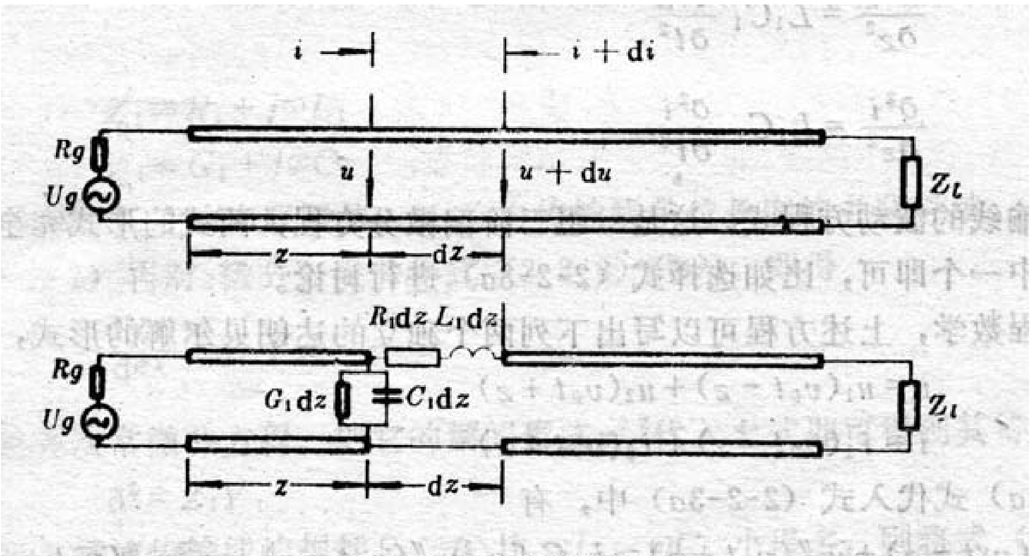


图 2-2-1　传输线等效电路

图 2-21 传输线等效电路

$$u = u(z,t)$$
$$i = i(z,t)$$

于是，在某一时刻经过微小线元 dz 后，电压电流的变化分别为

$$-du = -\frac{\partial u}{\partial z}dz$$
$$-di = -\frac{\partial i}{\partial z}dz$$

我们知道，线元 dz 两端处电压、电流的变化（减小）是由于串联阻抗的电位降、并联导纳分流造成的，它们遵循基尔霍夫定律，即

$$-\frac{\partial u}{\partial z}dz = R_1 dz \bullet i + L_1 dz \bullet \frac{\partial i}{\partial t}$$
$$-\frac{\partial i}{\partial z}dz = G_1 dz \bullet u + C_1 dz \bullet \frac{\partial u}{\partial t}$$

消去 dz，上式变为分布参数电路的微分方程式

$$-\frac{\partial u}{\partial z}dz = R_1 i + L_1\frac{\partial i}{\partial t} \tag{2-2-1}$$
$$-\frac{\partial i}{\partial z}dz = G_1 u + C_1\frac{\partial u}{\partial t} \tag{2-2-2}$$

此即为均匀传输线方程或称电报方程。

二、波动方程

考查无耗传输线的情况，此时 $R_1 = 0$ 、 $G_1 = 0$ 。式（2-2-1）、（2-2-2）退化为 $-\partial u/\partial z = L_1 \partial i/\partial t$ 、 $-\partial i/\partial z = C_1 \partial u/\partial t$ 。将前式再对 z 微分一次并将后式代入，将后式再对 z 微分一次并将前式人攻，整理后即可得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L_1 C_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2-2-3a}$$
$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = L_1 C_1\frac{\partial^2 i}{\partial t} \tag{2-2-3b}$$

此即无耗传输线的波动方程式。这是一组二阶偏微分方程，两式的形式完全一样，故我们只讨论其中一个即可，比如选择式（2-2-3a）进行讨论。

根据工程数学，上述方程可以写出下列四个独立的达良贝尔解的形式，即

$$u = u_1(v_p t - z) + u_2(v_p t + z) \tag{2-2-4a}$$

$$i = i_1(v_p t - z) + i_2(v_p t + z) \tag{2-2-4b}$$

将式（2-2-4a）式代入式（2-2-3a）中，有

$$u_1''(v_p t - z) + u_2''(v_p t + z) = L_1 C_1 \left[v_p^2 u_1''(v_p t - z) + v_p^2 u_2''(v_p t + z) \right]$$

于是解得

$$v_p = 1/\sqrt{L_1 C_1} \tag{2-2-5}$$

由此可见，式（2-2-4a）的第一项表示以速度v_p沿 z 轴正方向传播的任意形状的电压波，如图 2-2-2 所示。我们考查任意时刻 t，波形$u_1(v_p t - z)$上的 A 点，它随整个波形以速度v_p向$+z$ 方向行进。经过时间Δt后，A 点到达虚线波形上的 A' 点，此电压波形为$u_1[v_p(t+\Delta t) - z] = u_1[v_p t - (z - v_p \Delta t)]$，即 A 点沿$+z$ 方向移动了$v_p \Delta t$。同样地，式（2-2-4a）的第二项$u_2(v_p t + z)$则表示向$-z$ 方向移动的电压波。

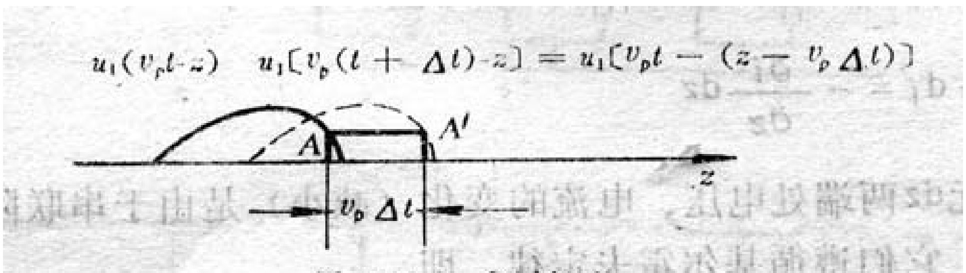


图 2-2-2 电压行波

若选式（2-2-3b）来讨论，则式（2-2-4b）中的$i_1(v_p t - z)$和$i_2(v_p t + z)$分别代表以速度v_p沿+z 和-z 两个方向传播的电流波。

三、正弦波动

正弦波动是波动中最基本的传播形式。此时的电压、电流可分别表示

为

$$u = \frac{\sqrt{2} U e^{j\omega t}}{2} \tag{2-2-6a}$$

$$i = \frac{\sqrt{2} I e^{j\omega t}}{2} \tag{2-2-6b}$$

式中 U、I 只是距离 z 的函数而与时间 t 无关，它们分别代表电压、电流的复振幅。将上二式分别代放微分方程式（2-2-1）和（2-2-2）中，得到

$$-\frac{dU}{dz} = (R_1 + j\omega L_1) I \equiv Z_1 I \tag{2-2-7}$$

$$-\frac{dI}{dz} = (G_1 + j\omega C_1) U \equiv Y_1 U \tag{2-2-8}$$

式中

$$Z_1 \equiv R_1 + j\omega L_1 \tag{2-2-9a}$$

$$Y_1 \equiv G_1 + j\omega C_1 \tag{2-2-9b}$$

Z_1 称为传输线单位长度的串联阻抗；Y_1 称为传输线单位长度的并联导纳。

将式（2-2-7）再对 z 微分一次并将式（2-2-8）代入，即得

$$\frac{d^2 U}{dz^2} = Z_1 Y_1 U \tag{2-2-10}$$

这是一个二阶齐次常微分方程。把它的解的形式 $e^{\delta z}$ 代入上式即可得到其特征方程

$$\delta^2 = Z_1 Y_1 \tag{2-2-11}$$

由于实际上微波传输线的损耗 R_1、G_1 比 ωL_1、ωC_1 小是多，则将式（2-2-9）代入上式可求得 δ 的值为

$$\begin{aligned}\delta &= \pm\sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} \\ &= \pm\sqrt{-\omega^2 L_1 C_1 (1 + R_1 / j\omega L_1)(1 + G_1 / j\omega C_1)} \\ &\approx \pm j\omega\sqrt{L_1 C_1}(1 + R_1 / j2\omega L_1 + G_1 / j2\omega C_1) \\ &= \pm\left[\left(\frac{R_1}{2}\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + \frac{G_1}{2}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}\right) + j\omega\sqrt{L_1 C_1}\right]\end{aligned}$$

令

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (\delta = \pm\gamma) \tag{2-2-12}$$

则

$$\alpha = \frac{R_1}{2}\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + \frac{G_1}{2}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \tag{2-2-13a}$$

$$\beta = \omega\sqrt{L_1 C_1} \tag{2-2-13b}$$

于是式（2-2-10）的解可以表示为$e^{-\gamma z}$和$e^{\gamma z}$的线性组合，即

$$U = Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z} \tag{2-2-14}$$

式中，A、B是待定积分常数，须由传输线的边界条件来确定。将式（2-2-14）代入式（2-2-7）可得到电流解为

$$I = \frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma z} - Be^{\gamma z}) \tag{2-2-15}$$

其中

$$Z_0 = \sqrt{Z_1 / Y_1} \tag{2-2-16}$$

称为传输线的特性阻抗。

四、传输特性

将式（2-2-1）和（2-2-15）代入式（2-2-6），可得出传输线上的电压、电流瞬时值的表达式为

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}Ae^{-\alpha z}e^{j(\omega t - \beta z)} + \frac{\sqrt{2}}{2}Be^{\varepsilon z}e^{j(\omega t + \beta z)} \tag{2-2-17}$$

$$i = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{A}{Z_0}e^{-\alpha z}e^{j(\omega t - \beta z)} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{B}{Z_0}e^{\varepsilon z}e^{j(\omega t + \beta z)} \tag{2-2-18}$$

由上式可见，传输线上任一点的电压、电流均包括两部分：第一项包含因子$e^{-\alpha z}e^{j(\omega t - \beta z)}$，它表示随着 z 的增大，其振幅将按$e^{-\alpha z}$规律减小，且相位连续滞后。它代表由电源向负载方向（+z 方向）传播的行波，即入射波；第二项包含因子$e^{\varepsilon z}e^{j(\omega t + \beta z)}$，它表示随着$z$的增大，其振幅将按$e^{\alpha z}$规律增大，且相位连续超前。它代表由负载电源方向（-z 方向）传播的行波，即反射波，如图 2-2-3 所示。这就是说，传输线上任一点的电压、电流通常都由

入射波和反射波两部分迭加而成的。

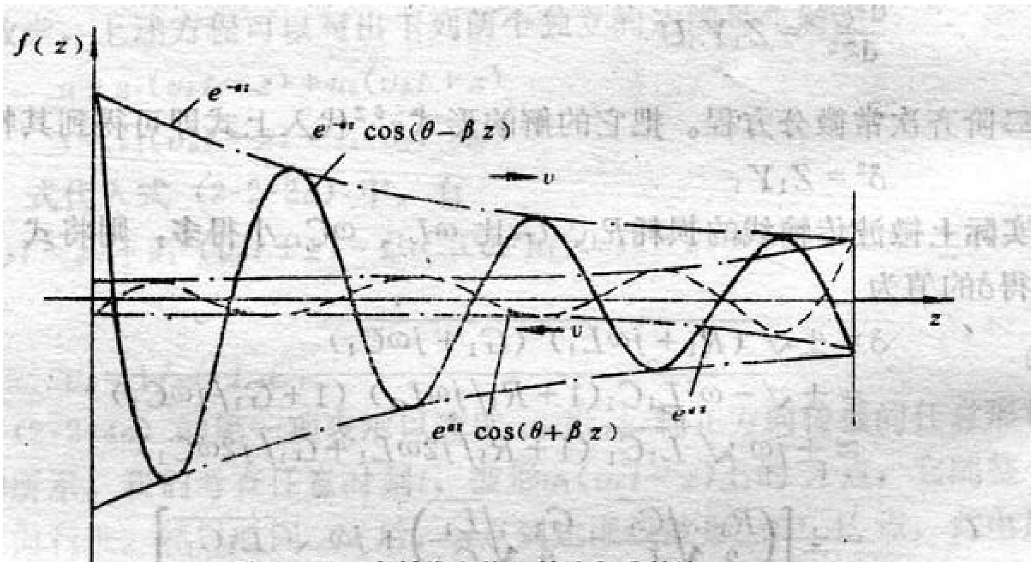


图 2-2-3 有耗线上的入射波和反射波

1．特性阻抗 Z_0

参看式（2-2-14)、（2-2-15），用符号“+”、“-”分别表示电压或电流的入射波、反射波，则有

$$\left.\begin{aligned} U^+ &= Ae^{-\gamma z} \\ U^- &= Be^{\gamma z} \end{aligned}\right\} \tag{2-2-19}$$

及

$$\left.\begin{aligned} I^+ &= \frac{A}{Z_0}e^{-\gamma z} \\ I^- &= \frac{B}{Z_0}e^{\gamma z} \end{aligned}\right\} \tag{2-2-20}$$

于是，式（2-2-14)、（2-2-15）可分别写成

$$\left.\begin{aligned} U &= U^+ + U^- \\ I &= I^+ - I^- \end{aligned}\right\} \tag{2-2-21}$$

根据式（2-2-19)、（2-2-20）写出入射波的电压和电流之比为

$$\left.\begin{aligned}\frac{U^{+}}{I^{+}} &= \frac{Ae^{-\gamma z}}{A/Z_0 e^{-\gamma z}} = Z_0 = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} \\ \frac{U^{-}}{I^{-}} &= \frac{Be^{-\gamma z}}{B/Z_0 e^{-\gamma z}} = Z_0 = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}}\end{aligned}\right\} \tag{2-2-22}$$

入射波和反射波都是行波，故可定义：行波电压和行波电流之比称为传输线的特性阻抗，记以Z_0。于是

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}} \tag{2-2-23a}$$

由于线路损耗很小，即$R_1 << \omega L_1$、$G_1 << \omega C_1$，所以利用处理式（2-2-11）时采用的近似方法便可得到

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}\left[1 - j\left(\frac{R_1}{2\omega L_1} - \frac{G_1}{2\omega C_1}\right)\right] \tag{2-2-23b}$$

（1）对于无耗传输线，由于$R_1 = 0$、$G_1 = 0$，则

$$Z_0 = \sqrt{L_1 / C_1} \tag{2-2-24}$$

（2）对于微波传输线，由于$R_1 << \omega L_1$、$G_1 << \omega C_1$，则

$$Z_0 = \sqrt{L_1 / C_1} \tag{2-2-25}$$

由式（2-2-24)、(2-2-25）可见，在无耗或微波传输情况下，传输线行性阻抗呈纯阻性，仅取决于传输线的分布参数L_1和C_1，与工作频率无关，也与传输线的位置无关，这是一个很可贵的特性。

2．传输常数γ

由式（2-2-12）可知，传输线上波的传输常数的一般表达式为

$$\gamma = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} = \alpha + j\beta \tag{2-2-26}$$

上式表明，在一般情况下，传播常数γ为一复数。其实部α称为衰减常数。将式（2-2-24）代入式（2-2-13a）得到

$$\alpha = \frac{R_1}{2}\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + \frac{G_1}{2}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \frac{R_1}{2Z_0} + \frac{G_1 Z_0}{2} = \alpha_c + \alpha_d \tag{2-2-27}$$

式中

$$\alpha_c = \frac{R_1}{2Z_0} \text{——导体电阻引起的损耗} \tag{2-2-28a}$$

$$\alpha_d = \frac{G_1 Z_0}{2} \text{——导体间介质引起的损耗} \tag{2-2-28b}$$

这就是说，当传输线存在损耗（该损耗部分是由导体电阻的热损耗引起的，部分是由介质极化损耗引起的）时，波的振幅将按指数律减小。

γ 的虚部 β 如式（2-2-13b）所示

$$\beta = \omega\sqrt{L_1 C_1} \tag{2-2-29}$$

因为 β_z 表示正弦波在 z 点的相位，故 β 称为相位常数。

若线上损耗可以忽略，即 $\alpha = 0$，则无耗线的传播常数退化为

$$\gamma = j\beta \tag{2-2-30}$$

即线上传输的波的振幅不变，只有相位变化。

3．相速和波长

为使问题简化，我们忽略线路的损耗（$\alpha = 0$），那么线上的电压瞬时值表达式（2-2-17）将改写为

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j(\omega t - \beta z)} + \frac{\sqrt{2}}{2} B e^{j(\omega t + \beta z)} \tag{2-2-31}$$

我们知道，沿传输线传播的电磁波的等相位点所构成的面称为波阵面或波前。波阵面移动的速度称为相位速度，简称相速。实际上，相位速度是指沿某一方向传播的行波的前进速度。式（2-2-31）的首项与末项分别代表正向和反向传播的行波。为此我们只讨论首项所代表的正向行波的相速即可以了。于是根据式（2-2-13b）、式（2-2-5），上式首项中的相位因子可写为

$$\omega t - \beta z = \beta[(\omega/\beta)t - z] = \beta\left[(1/\sqrt{L_1 C_1})t - z\right] = \beta(v_p t - z)$$

这与式（2-2-4）的首项具有同样的形式，于是正向行波的相位速度为

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{\omega}{\beta} = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 1/\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} = 1/\sqrt{\mu_0 \mu_r \bullet \varepsilon_0 \varepsilon_r} \\ &= 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \bullet 1/\sqrt{\varepsilon_r} = c/\sqrt{\varepsilon_r} \end{aligned} \tag{2-2-32}$$

式中 $c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ 为光速；ε_r、μ_r 分别为介质的相对介电常数和相对导磁率，通常 $\mu_r=1$。若线间介质为空气，$\varepsilon_r=1$，则 $v_p=c=3\times10^8$ m/s，空气微波传输线上波的相速等于光速。否则，波的传播速度将减小 $\sqrt{\varepsilon_r}$ 倍。

同一瞬间，沿线分布的波形上相邻两个等相位点的间距，或者说同一瞬时相位相差 2π 的两点间的距离称为波长，记以 λ。如图 2-2-4 所示。由图可见，下更关系式成立：

$$(\omega t_1-\beta z_1)-\left[\omega t_1-\beta(z_1+\lambda)\right]=2\pi$$

解得

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta} \tag{2-2-33}$$

利用频率 $f=\omega/2\pi$ 的关系和式（2-2-32），下列关系成立

$$v_p=f\lambda \tag{2-2-34}$$

考虑到式（2-2-32），传输线上的波长 λ 可表示为

$$\lambda=v_p/f=c/f\bullet 1/\sqrt{\varepsilon_r}=\lambda_0/\sqrt{\varepsilon_r} \tag{2-2-35}$$

式中　$\lambda_0=c/f$——真空中的波长。

上式表明，传输线上波的波长与其周围填充的介质有关：当由空气填充时，$\varepsilon_r=1$，则 $\lambda=\lambda_0$；否则，波长将缩短 $\sqrt{\varepsilon_r}$ 倍。

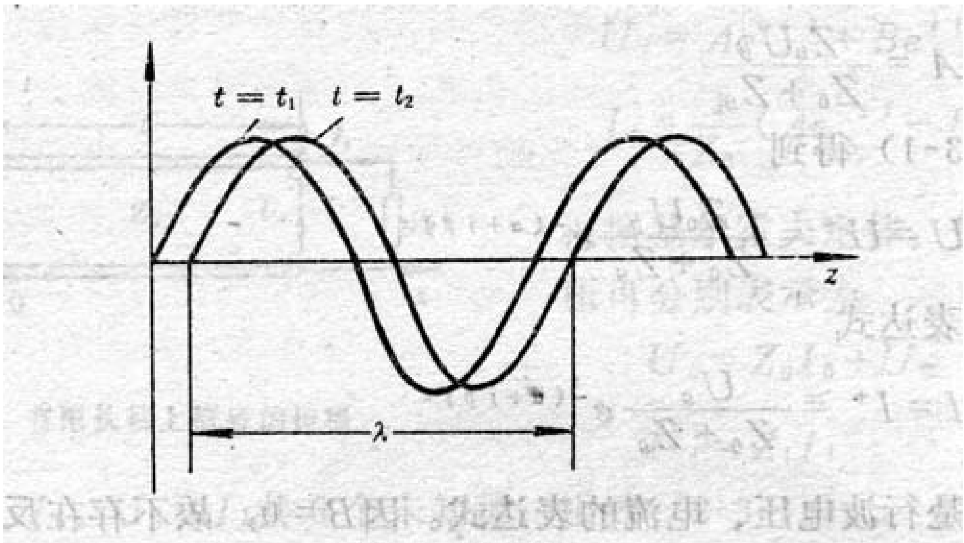


图 2-2-4 波长

§2-3 行波

一、电压、电流分布

现在研究图 2-3-1 所示的线路。设传输线为无限长，在其始端接有内阻抗为 Z_g 、正弦波电压为 U_g 的信号源。当信号源工作时，线路上有波在传输，所建立起来的电压、电流将服从式（2-2-14）、（2-2-15）所示的规律。其中的积分常数 A、B 需要根据线路的边界条件确定。

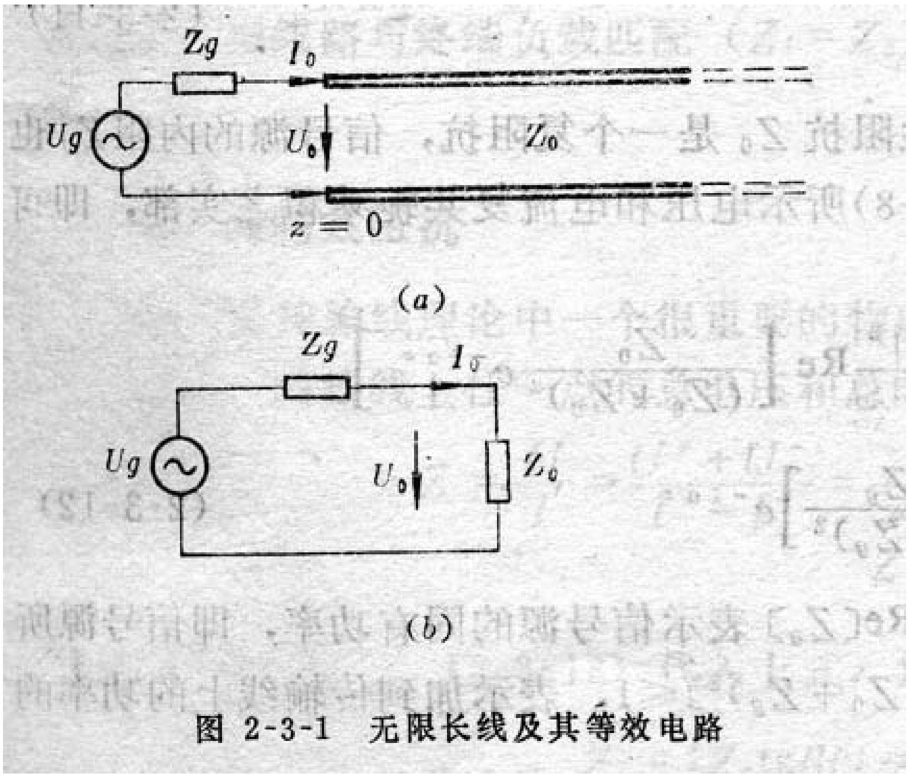


图 2-3-1　无限长线及其等效电路

首先确定 B。式（2-2-14）中的第二项为 $Be^{\gamma z}=Be^{(\alpha+j\beta)z}$，当 $z=\infty$ 时，其值将为无限大。这在给定 U_g 的情况下是不可能的，沿线各点的电压只能是有限值，为此只能有 B=0。于是在图 2-3-1（a）所示的线路中不存在反射波，只有入射波，其表示式为

$$U=Ae^{-\gamma z} \tag{2-3-1}$$

其次确定积分常数 A。将 $z=0$ 代入上式即得

$$U_0=A \tag{2-3-2}$$

那么由 $z=0$ 点流入线路的电流 I_0 可从式（2-2-15）得到

$$I_0=A/\sqrt{Y_1/Z_1}=A/Z_0 \tag{2-3-3}$$

从而由信号源向线路看过去的阻抗为

$$Z_{in}=U_0/I_0=\sqrt{Z_1/Y_1}=Z_0 \tag{2-3-4}$$

这就是说，无限长线路的输入阻抗Z_{in}就等于传输线本身的特性阻抗Z_0，如图 2-3-1(b)所示。

根据基尔霍夫定律，有

$$U_g = Z_g I_0 + U_0 \tag{2-3-5}$$

将式（2-3-2）、（2-3-3）代入上式得

$$A = \frac{Z_0 U_g}{Z_0 + Z_g} \tag{2-3-6}$$

将上式代入式（2-3-1）得到

$$U = U^+ = \frac{Z_0 U_g}{Z_0 + Z_g} e^{-(\alpha + j\beta)z} \tag{2-3-7}$$

同理可得到电流的表达式

$$I = I^+ = \frac{U_g}{Z_0 + Z_g} e^{-(\alpha + j\beta)z} \tag{2-3-8}$$

以上求得的二式就是行波电压、电流的表达式。因 B=0，故不存在反射波，即$U^- = 0$，$I^- = 0$。

若将时间因素考虑进去，并设$\alpha = 0$，则可得到无耗线路上的行波电压、电流的瞬时值表达式为

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} \left| U^+ \right| e^{i(\omega t - \beta z + \varphi z)} \tag{2-3-9a}$$

$$i = \frac{\sqrt{2}}{2} \left| I^+ \right| e^{i(\omega t - \beta z + \varphi z)} \tag{2-3-9b}$$

式中

$$\left| U^+ \right| = \left| \frac{Z_0 U_g}{Z_0 + Z_g} \right| \tag{2-3-10}$$

$$\left| I^+ \right| = \left| \frac{U_g}{Z_0 + Z_g} \right| \tag{2-3-11}$$

应注意的是，对一般传输线而言，特性阻抗Z_0是一个复阻抗，信号源的内阻Z_g也是一个复阻抗。为此，取式（2-3-7）、（2-3-8）所示电压和电

流复共轭乘积之实部，即可求得传输线上传输的功率 P，即

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[UI^*] = \frac{\left|U_g\right|^2}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{Z_0}{(Z_0+Z_g)^2}e^{-2\alpha z}\right]$$

$$= \frac{\left|U_g\right|}{4\mathrm{Re}[Z_g]}\mathrm{Re}\left[\frac{2Z_0Z_g}{(Z_0+Z_g)^2}\right]e^{-2\alpha z} \tag{2-3-12}$$

我们可以这样理解上式，前一系数$\left|U_g\right|^2/4\mathrm{Re}[Z_g]$表示信号源的固有功率，即信号源所提供的最大功率；中间的系数$2\mathrm{Re}[Z_0Z_g/(Z_0+Z_g)^2]\le 1$，表示加到传输线上的功率的减小率。当满足电源和线路共轭匹配的条件

$$Z_g^* = Z_0 \tag{2-3-13}$$

时，中间系数等于 1，信号源固有功率将全部输入线路；最后的系数$e^{-2\alpha z}$表示沿线功率的传输将按指数律减小，这是因为R_1、G_1的存在产生焦耳热，使功率在传输中有所消耗。

下面研究图 2-3-2 所示线路。线路全长为l，输入端接信号源（U_g、Z_g），终端接负载阻抗Z_1。根据式（2-2-14）、（2-2-15）可得到下列方程：在线路始端，$z=0$，电压、电流分别为U_0、I_0，则

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= A+B \\ I_0 &= (A-B)/Z_0 \end{aligned}\right\} \tag{2-3-14}$$

在终端，$z=l$，电压、电流分别为U_1、I_1，则

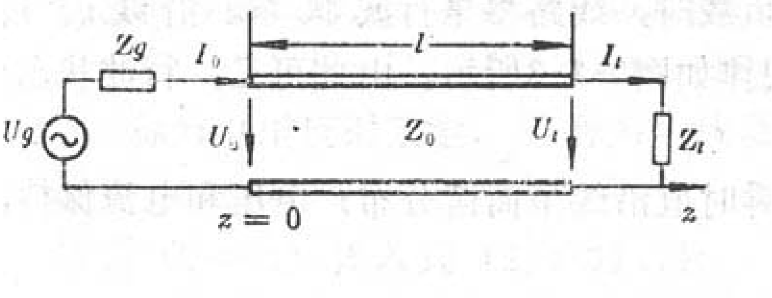


图 2-3-2 有限长线上信号的传播

$$\left.\begin{aligned} U_l &= Ae^{-\gamma l} + Be^{\gamma l} \\ I_l &= \frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma l} - Be^{\gamma l}) \end{aligned}\right\} \tag{2-3-15}$$

根据基尔霍夫定律，信号源和负载端的电压可分别表示为

$$\left.\begin{aligned} U_g &= Z_g I_0 + U_0 \\ U_l &= Z_l I_l \end{aligned}\right\} \tag{2-3-16}$$

以上 A、B、U_0、I_0、U_l 和 I_l 共 6 个未知数，由式（2-3-14）~（2-3-16）的 6 个方程完全可以解出。

对于微波传输线，当损耗可以忽略时，其特性阻抗 Z_0 为一实数（纯阻），传输常数 $\gamma = j\beta$，则源与线路的匹配条件（即式（2-3-13））变为 $Z_g = Z_0$。于是式（2-3-14）~（2-3-16）的解为

$$A = \frac{U_g}{2} \tag{2-3-17}$$

$$B = \frac{U_g}{2} \bullet \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} e^{-j2\beta l} \tag{2-3-18}$$

由式（2-3-18）可知，当终端所接负载阻抗 Z_l 等于传输线的特性阻抗 Z_0 是，$B = 0$。这就是说，当线路与终端负载匹配（$Z_l = Z_0$）时，传输线上只有入射的行波，而无反射波。

二、传输线阻抗

阻抗是传输线理论中一个很重要的物理概念。下面给出传输线阻抗的定义。

定义　传输线上任一点的总电压和总电流之比定义为该点的阻抗，记以 Z，即

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U^+ + U^-}{I^+ - I^-} = \frac{Ae^{-j\beta z} + Be^{j\beta z}}{\frac{A}{Z_0}e^{-j\beta z} - \frac{B}{Z_0}e^{j\beta z}} \tag{2-3-19}$$

将式（2-3-17）、（2-3-18）代入上式，加以整理可得

$$Z = Z_0 \frac{Z_1 + jZ_0 tg\beta(l - z)}{Z_0 + jZ_l tg\beta(l - z)} \tag{2-3-20}$$

当 $z = 0$ 时，由上式可得线路输入阻抗

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_l + jZ_0 tg\beta l}{Z_0 + jZ_l tg\beta} \tag{2-3-21}$$

当 $z = l$ 时，由上式可得线路终端阻抗

$$Z = Z_l \tag{2-3-22}$$

现在研究一下线路呈行波状态时，传输线上的阻抗分布情况。将 $Z_l = Z_0$ 代入式（2-3-20）得到

$$Z = Z_0 \tag{2-3-23}$$

这就是说行波传输线上的阻抗分布沿线是不变的，均等于其特性阻抗 Z_0。

综上所述，当传输线无限长或终接匹配负载时，线路将呈行波状态。沿线 u、i、$|U|$、$|I|$、Z 及相位 $(\omega t - \beta z)$ 等的变化规律如图 2-3-3 所示。由此可见，行波状态有如下特点：

（1）沿线各点电压、电流振幅不变，其瞬时值沿线呈简谐分布；电压和电流保持同相位。

（2）电压、电流相位随 z 的增加而连续滞后。

（3）沿线各点的阻抗均等于特性阻抗。

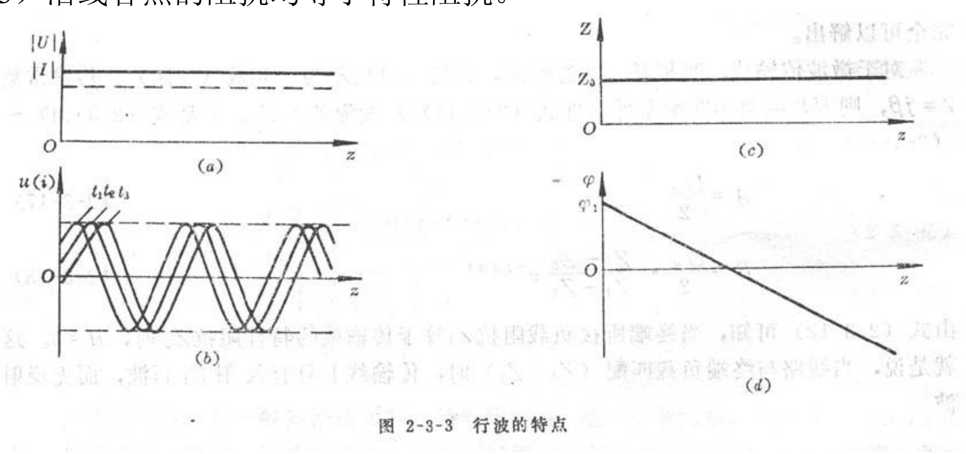


图 2-3-3　行波的特点

§2-4　驻波

一、反射系数

将式（2-3-17）、（2-3-18）代入式（2-2-14）、（2-2-15）可得线路上任一点的电压、电流表达式为

$$U=\frac{U_g}{2}e^{-j\beta z}+\frac{U_g}{2}e^{-j\beta l}\bullet\frac{Z_l-Z_0}{Z_l+Z_0}e^{-i\beta(l-z)} \tag{2-4-1}$$

$$I=\frac{U_g}{2Z_0}e^{-j\beta z}-\frac{U_g}{2Z_0}e^{-j\beta l}\bullet\frac{Z_l-Z_0}{Z_l+Z_0}e^{-i\beta(l-z)} \tag{2-4-2}$$

式（2-4-1）的物理意义：第一项代表入射波电压，只要将$Z_g=Z_0$、$\alpha=0$代入式（2-3-7）即得此项。其电压振幅 A 等于信号源开路电压之半。第二项代表反射波电压，其中$U_g/2$表示被激励起的入射波电压振幅，$e^{-i\beta l}$表示由源传至负载端引起的相位滞后。入射波传至负载，一部分能量被负载Z_l吸收；剩余部分即为$(Z_l-Z_0)/(Z_t+Z_0)$，它被负载反射回来沿线向电源方向传播，返回至所研究点时相位又滞后一角度为$e^{-i\beta(l-z)}$。一般情况下，传输线路上总是有入射波和反射波同时存在的。线上某点总电压、总电流系由入射波和反射波的电压、电流迭回而得。反射现象是微波传输线上的最基本的物理现象。为表征反射的大小，我们给出反射系数的定义如下。

定义　传输线上某点的反射波电压与入射波电压之比或反射波电流与入波电流之比的负值称为该点的反射系数，记以$\varGamma$或$\varGamma_I$，即

$$\varGamma=U^-/U^+,\qquad \varGamma_I=-I^-/I^+ \tag{2-4-3}$$

式中，$\varGamma$称为电压反射系数，$\varGamma_I$称为电流反射系数。通常所说的反射系数指的是电压反射系数。

将式（2-4-1）代入式（2-4-3）得

$$\Gamma = \frac{U_g}{2} e^{-j\beta l} \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} e^{-j\beta(l-z)} \bullet \frac{1}{\frac{U_g}{2} e^{-j\beta z}}$$

$$= \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} e^{-j2\beta(l-z)} \tag{2-4-4}$$

由上式可见，反射系数是位置 z 的函数。

当 $z = l$ 时，为终端反射系数，记以 Γ_l。由式（2-4-4）可得

$$\Gamma_l = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} = \left| \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} \right| e^{j\varphi_l} = \left| \Gamma_l \right| e^{j\varphi_l} \tag{2-4-5}$$

于是式（2-4-4）可表示为

$$\Gamma = \left| \Gamma_l \right| e^{j[\varphi_l - 2\beta(l-z)]} \tag{2-4-6}$$

其中

$$\Gamma_l = \left| \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} \right| \tag{2-4-7}$$

$$\varphi_l = \arg\left(\frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} \right) \tag{2-4-8}$$

由式（2-4-7）可以看出，随着终接负载阻抗 Z_l 的性质不同，传输线上将有如下三种不同的工作状态。

（1）当 $Z_l = Z_0$ 是，$\Gamma_l = 0$，无反射，称为行波关态。如§2-3 所述。

（2）当 $Z_l = 0$（终端短路）时，$\Gamma_l = -1$；

当 $Z_l = \infty$（终端开路）时，$\Gamma_l = 1$；

当 $Z_l = \pm jZ_l$（终接纯电抗）时，$\left| \Gamma_l \right| = 1$。

这三种情况均产生全反射，称为驻波状态。本节将分别叙述之。

（3）当 $Z_l = R_l \pm jX_l$ 时，$\left| \Gamma_l \right| < 1$，产生部分反射，称为行驻波状态，将于下节讨论。

二、终端短路线

由前面分析得知，当传输线终端短路、开路或接纯电抗负载时，将产

生全反射，线路处于驻波状态。下面着重分析终端短路情况。

终端短路，即 $Z_l = 0,\ \Gamma_l = -1$。由式（2-4-1）、（2-4-2）可得终端电压、电流为

$$U_l = \frac{U_g}{2}e^{-j\beta l} - \frac{U_g}{2}e^{-j\beta l} = 0 \tag{2-4-9}$$

$$I_l = \frac{U_g}{2Z_0}e^{-j\beta l} + \frac{U_g}{2Z_0}e^{-j\beta l} = \frac{U_g}{Z_0}e^{-i\beta l} = 2I_l^+ \tag{2-4-10}$$

上二式表明，终端短路处为电压节点（零）、电流腹点（终端处入射波电流的两倍）。

1．沿线电压、电流分布

由式（2-4-1）、（2-4-2）可求得终端短路线上任一点的复数电压、电流表达式为

$$U = j2U_l^+ \sin[\beta(l-z)] \tag{2-4-11a}$$

$$I = \frac{2U_l^+}{Z_0}\cos[\beta(l-z)] \tag{2-4-11b}$$

它们的瞬时式为

$$u = \sqrt{2}\left|U_l^+\right|\sin\left[\beta(l-z)\right]\cos\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) \tag{2-4-12a}$$

$$i = \frac{\sqrt{2}\left|U_l^+\right|}{Z_0}\cos\left[\beta(l-z)\right]\cos\left(\omega t + \varphi_1\right) \tag{2-4-12b}$$

由上二式可知，沿线各点电压、电流均随时间作余弦变化，u、i 在时间上相差 $\pi/2$，在空间分布上也错开 $\lambda/2$。这表明在波所携带的电磁能量中，当电场达到极值时磁场为零，当电场变为零时磁场达到极值。也就是说电磁能量在做相互转换，形成电磁振荡而不携带能量行进，这就是所谓的“驻波”。

根据式（2-4-12）可以绘出沿线 u、i 的分布曲线，如图 2-4-1(b)所示。为简化分析，令 $\varphi_l = 0$。图中给出① $\omega t = 0$；② $\omega t = \pi/4$；③ $\omega t = \pi/2$；④ $\omega t = \pi$；4 种情况时的曲线。

线。

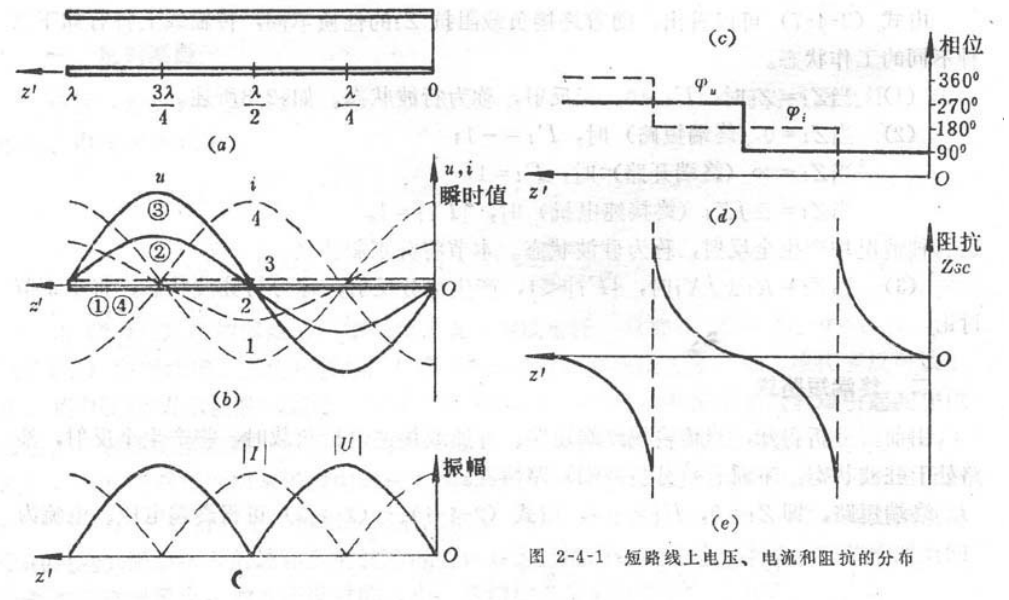


图 2-4-1　短路线上电压、电流和阻抗的分布

图(c)绘出振幅的分布情况。由图可见：

（1）当 $l-z=n\dfrac{\lambda}{2}(n=0,1,2,\cdots)$ 时，距终端为半波长的整数倍处（包括终端）为电压节点、电流腹点，且 $|U|_{\min}\equiv 0,\ |I|_{\max}=2|I_l^+|$。

（2）当 $l-z=(2n+1)\lambda/4$ 时 $(n=0,1,2,\cdots)$，距终端为 $\lambda/4$ 的奇数倍处为电压腹点、电流节点，且 $|U|_{\max}=2|U_l^+|,\ |I|_{\min}\equiv 0$。

相位关系可由下式角定

$$I=-j\frac{U}{Z_0}ctg\beta(l-z) \tag{2-4-13}$$

图(d)绘出相位的变化规律。由上式可见，I 与 U 的相位差一个“$-j$”因子，即相差 90°，但超前还是滞后，还要由 $ctg\beta(l-z)$ 的正负来确定。相位分布呈如下规律：

（1）当 $ctg\beta(l-z)>0$，即当 $0<(l-z)<\dfrac{\lambda}{4},\ \dfrac{\lambda}{2}<(l-z)<\dfrac{3\lambda}{4},\cdots$ 时，电

流滞后电压 90°；

（2）当 $ctg\beta(l-z)<0$，即当 $\lambda/4<(l-z)<\lambda/2, 3\lambda/4<(l-z)<\lambda,\cdots$ 时，电流超前电压 90°；

（3）观察某一瞬时的 u 、i 分布曲线可以看出，在波节点的两边电压（或电流）反相，在相邻两节点间的电压（或电流）同相；

（4）在 $(l-z)=n\lambda/4$ 处，电城市和电流同相，这些特殊点处在距终端 $\lambda/4$ 的整数倍的地方。

2．阻抗特性

用 Z_{sc} 表示无耗短路线的阻抗，将 $Z_l=0$ 代入式（2-3-20）得

$$Z_{sc}=jZ_0tg\beta(l-z) \tag{2-4-14}$$

其输入阻抗为

$$Z_{scin}=jZ_0tg\beta l \tag{2-4-15}$$

沿线的阻抗分布示于图 2-4-1(e)中，由图可见：

（1）Z_{sc} 为一纯电抗，随频率和长度而变化。当频率一定时，仅是长度的周期函数，周期为 $\lambda/2$。当 $(l-z)=0$，即 $z=l$ 时，$Z_{sc}=0$，相当于串联谐振；当 $(l-z)=\lambda/4$ 时，$Z_{sc}=\infty$，相当于并联谐振；当 $0<(l-z)<\lambda/4$ 时，$Z_{sc}=jX$，相当于感抗；当 $\lambda/4<(l-z)<\lambda/2$ 时，$Z_{sc}=-jX$，相当于容抗。

（2）从短路终端算起，每隔 $\lambda/4$ 长度，阻抗的性质改变一次，即传输线具有“$\lambda/4$ 阻抗变换特性”；每隔 $\lambda/2$ 长度，阻抗将重复一次，即传输线具有“$\lambda/2$ 阻抗重复特性”。

三、终端开路线

终端开路，$Z_l=\infty,\ \Gamma_l=1$ 代入式（2-4-1）、（2-4-2）即可得到沿线 U、I 及 Z 的表达式为

$$U=2U_l\cos\beta(l-z) \tag{2-4-16a}$$

$$I = j\frac{2U_l}{Z_0}\sin\beta(l-z) \tag{2-4-16b}$$

$$Z_{oc} = -jZ_0 ctg\beta(l-z) \tag{2-4-17a}$$

$$Z_{ocin} = -jZ_0 ctg\beta(l-z) \tag{2-4-17b}$$

实际上，由于传输线具有$\lambda/4$阻抗变换特性，距短路终端$\lambda/4$的等效阻抗∞，这恰好就是开路线的情况。因此，有关开路线各胡量的分布状况，不必另作分析，只要把短路线去掉尾部$\lambda/4$的长度即可得到。这一等效关系由图 2-4-2 看得很清楚。

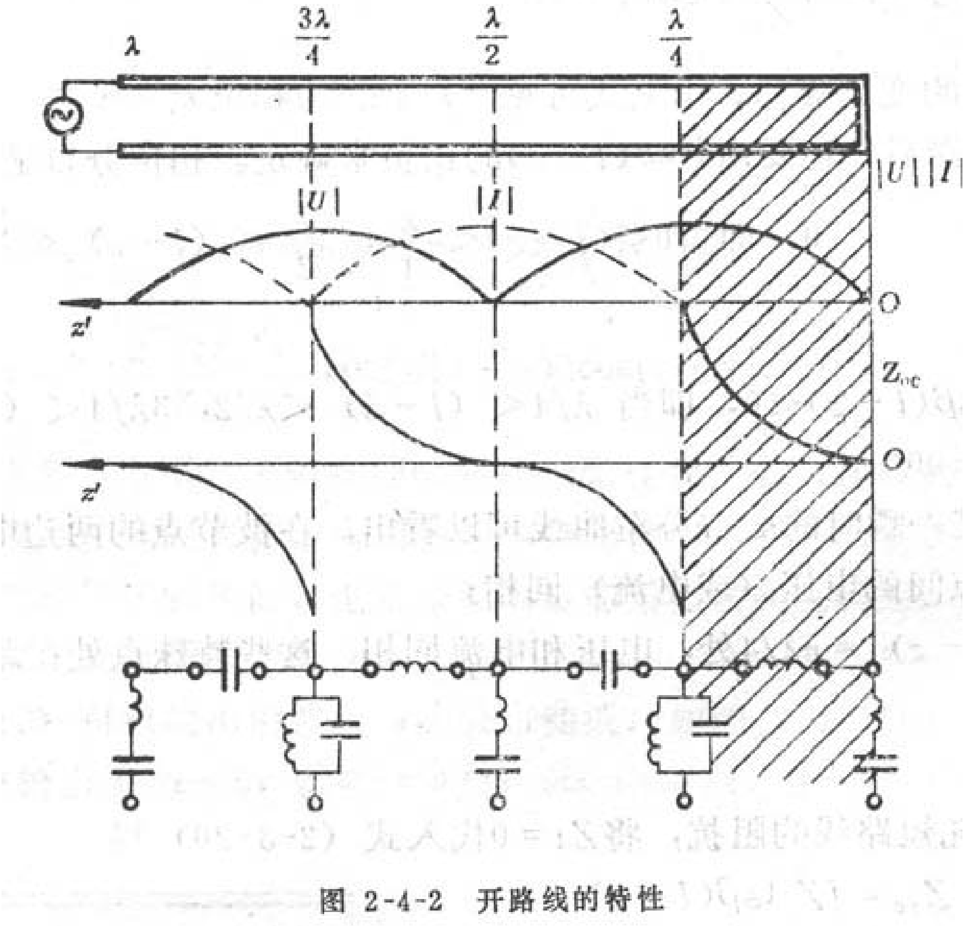


图 2-4-2　开路线的特性

由上面分析可知，短路线和开路线的阻抗均匀纯电抗，其值在$0\sim\pm\infty$之间，因此，任一电抗均可用适当长度的短路线或开路线来等效。它们在微波技术中有着广泛的应用。

四、终端接纯电抗负载的无耗线

终端接电抗负载时$Z_l=\pm jX_l$，$|\Gamma_l|=1$。在这种情况下也要产生全反射而形成驻波。但此时的Γ_l是一个复数，终端不再是小腹或波节点。这种负载又分两种情况，下面分别讨论之。

1．负载为纯感抗

此时$Z_l=jX_l$，可用一段短于$\lambda/4$的终端终路线来等效它。这一段等效短路线的长度可由下式求得

$$l_{sc}=\frac{\lambda}{2\pi}arctg\left(\frac{X_l}{Z_0}\right) \tag{2-4-18}$$

当X_l由 0 变到∞时，l_{sc}将由 0 变至$\lambda/4$。于是终接纯感抗的长度为l的传输线上的电压、电流及阻抗的分布状况与长度为$(l+l_{sc})$的终端短路线上的分布情况完全一样，如图 2-4-3 所示。实际上，把终端短路线自终端起截去长度为l_{sc}后的电压、电流及阻抗分布就是终接纯电感负载时的无耗线上各参量的分布。

2．负载为纯容抗

负载接纯容抗时$Z_l=-jX_l$，可用一段短于$\lambda/4$的终端开路线等效此电容。其等效长度可由下式求得

$$l_{oc}=\frac{\lambda}{2\pi}arcctg\left(\frac{X_l}{Z_0}\right) \tag{2-4-19}$$

同样道理，把终端开路线自终端起截去长度l_{oc}后的各参量的分布，便是终接纯电容负载的无耗线的各参量的分布，如图 2-4-4 所示。

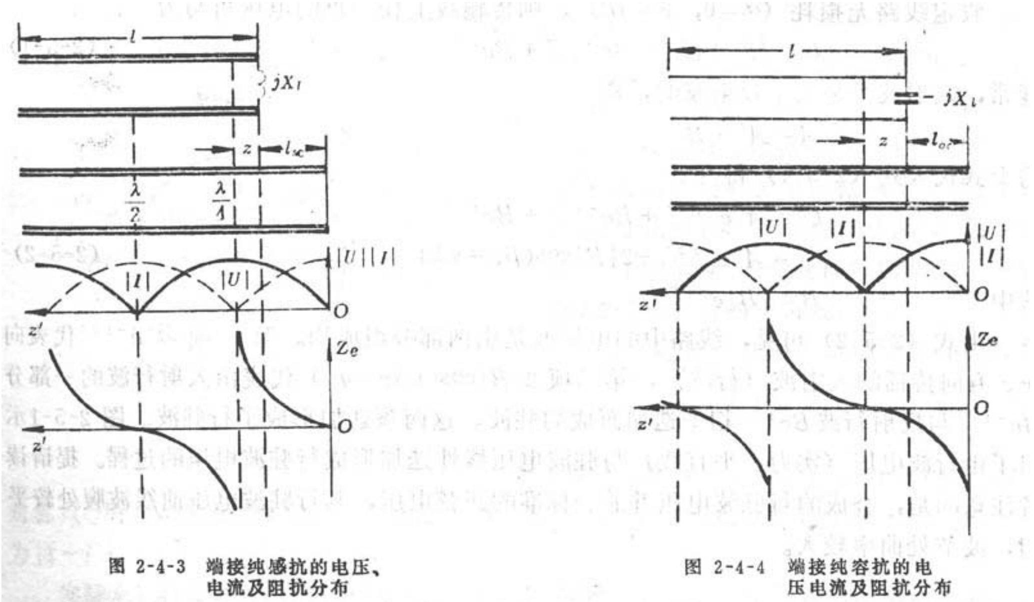


图 2-4-3　端接纯感抗的电压、电流及阻抗分布

图 2-4-4　端接纯容抗的电压电流及阻抗分布

为方便计，以下用$d_{\min 1}$、$d_{\max 1}$分别代表离开终端出现的第一个电压节点、第一个电压腹点的位置。由上二图可见，对纯感性负载而言，$d_{\min 1} > \lambda/4$；对纯容性负载则$d_{\min 1} < \lambda/4$。上述结论在微波测量中对判定负载阻抗的性质是很有用的。

上面分析了三种不同条件下所产生的驻波，现在归纳驻波的特点如下：

（1）沿线电压、电流振幅是位置的函数，具有波腹点（其值是入射波时的 2 倍）和波节点（其值恒为零）。

（2）沿线各点电压、电流在空间和时间上均相差$\pi/2$，因此对无耗而言，当它处于驻波状态时，既无能量损耗也无能量传播，只进行电磁能的相互转换，波在原地做振荡，故驻波又称为“驻在波”。

（3）相邻两波腹（或波节）点的间距为$\lambda/2$，波腹至波节点的间距为$\lambda/4$。相邻二节点间沿线各点的电压（或电流）同相；波节点两边的电压（或电流）则反相。腹、节点处电压和电流同相。

（4）阻抗呈纯电抗性且随频率和长度而变化。当频率一定时，阻抗随长度而变，或相当于电感或相当于电容，或具有谐振（串、并联电路）性质。

总而言之，当传输线终端短路，开路或接纯电抗负载时，均形成驻波，而驻波的特性都是一样的，但驻波在线路中的分布位置和大小有所不同。

§2-5　行驻波

当终端接任意负载时，由于$Z_l \neq Z_0$，所以终端将产生部分反射。即在线路中由入射波和中分反射波相干迭加而形成“行驻波”。

一、行驻波的形成

假定线路无损耗$(\alpha = 0,\ \gamma = j\beta)$，则传输一上任一点的电压可写为

$$U = U^+ + U^- = Ae^{-j\beta z} + Be^{j\beta z} \quad (2\text{-}5\text{-}1)$$

通常，入射波总是大于反射波的，即

$$A = A' + B$$

将上式代入式（2-5-1）得

$$U = A'e^{-j\beta z} + Be^{-j\beta z} + Be^{j\beta z} = A'e^{-j\beta z} + 2|B|\cos(\beta z + \varphi') \quad (2\text{-}5\text{-}2)$$

式中

$$B = |B|e^{j\varphi'}$$

由式（2-5-2）可见，线路中的电压波是由两部分组成的。第一项$A'e^{-j\beta z}$代表向+z方向传播的入射波（行波），第二项$2|B|\cos(\beta z + \varphi')$代表由入射行波的一部分$Be^{-j\beta z}$与反射行波$Be^{j\beta z}$相干迭加而成的驻波。这两项迭加形成了行驻波。图 2-5-1 示出了由行波电压（实为一平直线）与驻波电压线性迭加形成驻波电压的过程。提请读者注意的是，合成的行驻波电压并非一标准的正弦电压，其行驻波电压曲线波腹处较平坦，波节处曲率较大。

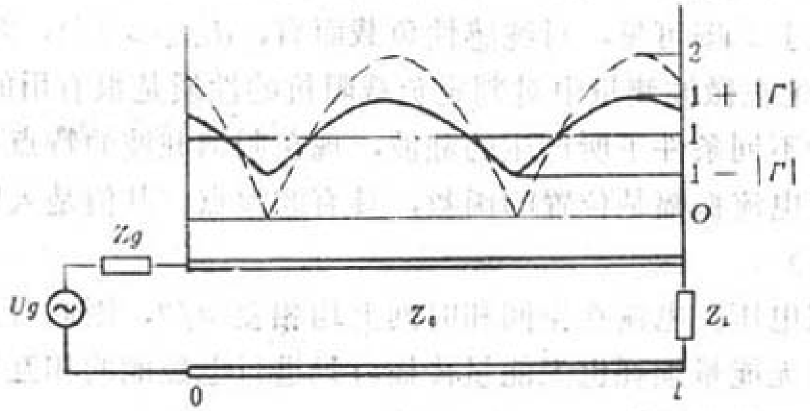


图 2-5-1 行驻波分布

二、反射系数矢量图

根据电压反射系数的定义有

$$\Gamma \equiv |\Gamma| e^{j\theta} = \frac{U^-}{U^+} = \frac{Be^{j\beta z}}{Ae^{-j\beta z}} = \left|\frac{B}{A}\right| e^{j(2\beta z+\varphi_l)} \tag{2-5-3}$$

这是线路上任意观测点 z 处的反射系数，其中

$$\theta = 2\beta z + \varphi_l \tag{2-5-4}$$

$$B/A = |B/A| e^{j\varphi_l} \tag{2-5-5}$$

前已述及，对于无源负载来说，$B < A$，故总有 $|\Gamma| = |B/A| < 1$。当观测点 z 移动时，反射系数 Γ 的绝对值不变，幅角 θ 则随之变化。将上述关系绘在复平面内，就成为图 2-5-2 中所示的以 $|\Gamma|$ 为半径的圆，这就是反射系灵敏圆。再将式（2-5-3）代入式（2-5-1）中，即可求出电压的绝对值为

$$|U| = \left|Ae^{-j\beta z} + \Gamma Ae^{-j\beta z}\right| = |A| \bullet |1+\Gamma| \tag{2-5-6}$$

这样一来，$1+\Gamma$ 变成为连结点 $(-1, j0)$ 和 Γ 的矢端 P 点的矢量，其长度为 $|1+\Gamma|$。当入射波电压振幅 A 一定时，式（2-5-6）所示的行驻波电压振幅 $|U|$

随观测点 z 的变化形状，完全可以从图 2-5-2 中 $|1+\Gamma|$ 的值随 z 的变化曲线而得到，这就是图 2-5-1 所示的实曲线。

关于电流，利用上面同样的计算可得

$$|I| = \frac{1}{Z_0} \bullet |A| \bullet |1-\Gamma| \tag{2-5-7}$$

图 2-5-2 中的 $-\Gamma$ 恰是 P 点相对于原点 O 的对称点 Q 所表示的矢量，则 $1-\Gamma$ 就是点 $(-1, j0)$ 与 Q 点连线所构成的矢量，其大小为 $|1-\Gamma|$。

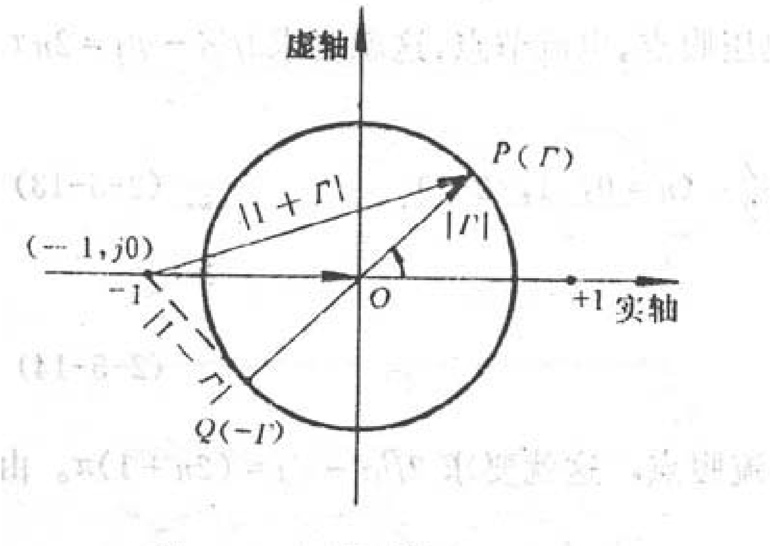


图 2-5-2 反射系数图

图 2-5-2 反射系数图

实际上 $|A|$ 就是入射波电压振幅，即 $|A| = |U^+|$，$|A|/Z_0$ 为入射波电流振幅，即 $|A|/Z_0 = |I^+|$。若令 $l - z = d$，则

$$|U| = |U^+| \left|1 + |\Gamma_l| e^{j(\varphi_l - 2\beta d)}\right| = |U^+| \sqrt{1 + |\Gamma_l|^2 + 2|\Gamma_l| \cos(2\beta d - \varphi_l)} \tag{2-5-8a}$$

$$|I| = |I^+| \left|1 - |\Gamma_l| e^{j(\varphi_l - 2\beta d)}\right| = |I^+| \sqrt{1 + |\Gamma_l|^2 - 2|\Gamma_l| \cos(2\beta d - \varphi_l)} \tag{2-5-8b}$$

三、沿线电压、电流分布

为形象描绘行驻波状态下沿线波的分布特性，必须知道波的腹点和节点的大小及其位置。

1．波腹点和波节点的大小

由式（2-5-8）可见，当$\cos(2\beta d-\varphi_l)=1$时，出现电压腹点、电流节点，且

$$|U|_{\max}=|U^+|(1+|\Gamma_l|) \tag{2-5-9a}$$

$$|I|_{\min}=|I^+|(1-|\Gamma_l|) \tag{2-5-9b}$$

当$\cos(2\beta d-\varphi_l)=-1$时，出现电压节点、电流腹点，且

$$|U|_{\min}=|U^+|(1-|\Gamma_l|) \tag{2-5-10a}$$

$$|I|_{\max}=|I^+|(1+|\Gamma_l|) \tag{2-5-10b}$$

由此可得

$$\frac{|U|_{\max}}{|I|_{\max}}=\frac{|U^+|}{|I^+|}\bullet\frac{1+|\Gamma_l|}{1-|\Gamma_l|}=\frac{|U^+|}{|I^+|}=Z_0 \tag{2-5-11}$$

$$\frac{|U|_{\min}}{|I|_{\min}}=\frac{|U^+|}{|I^+|}\bullet\frac{1-|\Gamma_l|}{1+|\Gamma_l|}=\frac{|U^+|}{|I^+|}=Z_0 \tag{2-5-12}$$

上二式即是常用来计算腹、节点幅值的公式。由式（2-5-9）、（2-5-10）可见，由于$|\Gamma_l|<1$，反射波小于入射波，因而合成波腹点的幅值小于入射波的 2 倍，节点的值也不为零，这是与驻波不同之处。

2．波腹点和波节点的位置

前已述及，当$\cos(2\beta d-\varphi_l)=1$时出现电压腹点、电流节点，这就要求$2\beta d-\varphi_l=2n\pi$。由此求得电压腹点（电流节点）的位置为

$$d_{\max}=l-z_{\max}=\frac{\lambda\varphi_l}{4\pi}+n\frac{\lambda}{2}(n=0,1,2,\cdots) \tag{2-5-13}$$

距终端出现的第一个电压腹点的位置为

$$d_{\max 1}=\frac{\lambda}{4\pi}\varphi_l \tag{2-5-14}$$

当 $\cos(2\beta d-\varphi_l)=-1$ 时出现电压节点、电流腹点，这就要求 $2\beta d-\varphi_l=(2n+1)\pi$。由此求得电压节点、电流腹点的位置为

$$d_{\min}=l-z_{\min}=\frac{\lambda}{4\pi}\varphi_l+(2n+1)\frac{\lambda}{4}(n=0,1,2,\cdots) \tag{2-5-15}$$

距终端出现的第一个电压节点的位置为

$$d_{\min 1}=\frac{\lambda}{4\pi}\varphi_l+\frac{\lambda}{4}=d_{\max 1}+\frac{\lambda}{4} \tag{2-5-16}$$

由上列各式可见，腹、节点位置取决于 φ_l，即取决于负载阻抗的性质。下面将分别讨论终接不同负载阻抗时的电压、电流分布情况。

（1）当 $Z_l=R_l<Z_0$（终接小电阻）时

此时 $\varphi_l=0$（见式（2-4-8）故 $d_{\max 1}=\lambda/4$ 或 $d_{\min 1}=0$。由此得出绳索论：当终接小于特性阻抗的纯电阻负载时，终端处为电压节点、电流腹点。沿线电压、电流振幅分布示于图 2-5-3(a)。

（2）当 $Z_l=R_l>Z_0$（终接大电阻）时

此时 $\varphi_l=0$，故故 $d_{\max 1}=0$ 或 $d_{\min 1}=\lambda/4$。由此得出结论：当终接大于特性阻抗的纯电阻时，终端为电压腹点、电流节点。沿线电压电流振幅示于图 2-5-3(b)。

（3）当 $Z_l=R_l+jX_l$（终接感性复阻抗）时

将 $Z_l=R_l+jX_l$ 代入（2-4-8）得

$$\varphi_l=arctg\frac{2X_lZ_0}{R_l^2+X_l^2-Z_0^2} \tag{2-5-17}$$

可见 $0<\varphi_l<\pi$，于是 $0<d_{\max 1}<\lambda/4$。故可得到结论：当终接感性复阻抗时，离开终端第一个出现的是电压腹点（电流节点）。沿线电压、电流振幅分布如图 2-5-3(c)所示。

（4）当 $Z_l=R_l-jX_l$（终接容性复阻抗）时

由式（2-4-8）得

$$\varphi_l=arctg\frac{-2X_lZ_0}{R_l^2+X_l^2-Z_0^2} \tag{2-5-18}$$

可见$0 < \varphi_l < 2\pi$，于是$\lambda/4 < d_{\max 1} < \lambda/2$或$0 < d_{\max 1} < \lambda/4$。故得到结论：当终接容性复阻抗时，离开终端第一个出现的是电压节点（电流腹点）。沿线电压、电流振幅分布示于图 2-5-3(d)中。

图 2-5-3　端接一般负载时，沿线电压、电流振幅分布

在实际测量中，(3)、(4) 的结论是很有用途的。在所测得的驻波曲线中，若距终端小于$\lambda/4$处出现的是电压腹点，则被测负载可断定为感性复阻抗；若出现的是电压节点，则被测负载可断定为容性复阻抗。以上结论将在阻抗图的应用中得到印证，届时再加以论述。

四、阻抗特性

当终端接任意负载阻抗时，无耗线上任一点的阻抗可按式（2-3-20）计算（令$l - z = d$）

$$Z = Z_0 \frac{Z_l + jZ_0 tg\beta d}{Z_0 + jZ_l tg\beta d} = R + jX$$

将$Z_l = R_l \pm jX_l$代入，分离实部和虚部，得到

$$\left.\begin{aligned} R &= Z_0^2 R_l \frac{\sec^2 \beta d}{(Z_0 \mp X_l tg\beta d)^2 + (R_l tg\beta d)^2} \\ X &= Z_0 \frac{\pm(Z_0 \mp X_l tg\beta d)(X_l + Z_0 tg\beta d) - R_l^2 tg\beta d}{(Z_0 \mp X_l tg\phi d)^2 + (R_l tg\beta d)^2} \end{aligned}\right\} \tag{2-5-19}$$

根据上式，可绘出端接任意复阻抗情况下沿线路的阻抗分布曲线，如图 2-5-4 所示。

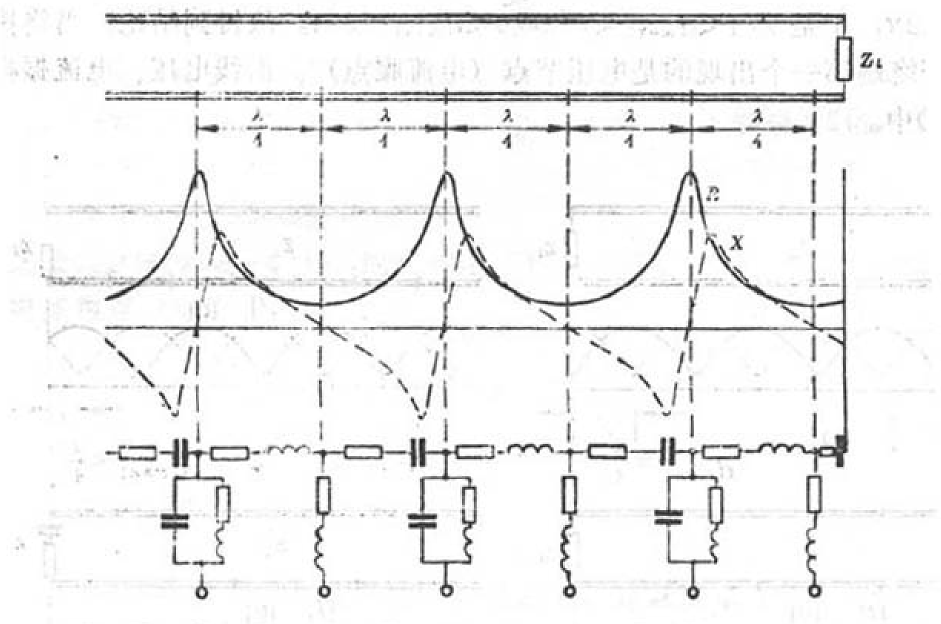


图 2-5-4 端接容性复阻抗时线上电阻R和电抗X的分布情况

由图可见，沿线阻抗分布具有如下特点。

（1）沿线阻抗周期性变化。在波腹、波节点处，阻抗呈线阻性（$X=0$），阻抗变化周期为$\lambda/2$。

在电压腹点处，阻抗出现最大值，且为纯电阻，相当于并联谐振，其值为

$$Z_{\max} \equiv R_{\max} = \frac{|U|_{\max}}{|I|_{\min}} = Z_0 \frac{1+|\Gamma_l|}{1-|\Gamma_l|} = Z_0 \rho > Z_0 \qquad (2\text{-}5\text{-}20)$$

在电压节点处，阻抗出现最小值，且为纯电阻，相当于串联谐振，其值为

$$Z_{\min} \equiv R_{\min} = \frac{|U|_{\min}}{|I|_{\max}} = Z_0 \frac{1+|\Gamma_l|}{1-|\Gamma_l|} = Z_0 K > Z_0 \qquad (2\text{-}5\text{-}21)$$

以上二式中出现的ρ、K分别称为驻波系数和行波系数。

（2）每隔$\lambda/4$，阻抗性质变换一次，即具有“$\lambda/4$阻抗变换特性”。

（3）每隔$\lambda/2$，阻抗性质重复一次，即具有“$\lambda/2$抗重复特性”。因此，长度为$\lambda/2$或其整数倍时，不论终端接什么样的负载，其输入阻抗都和负载阻抗相等。

图 2-5-4 实际上是终接容性复阻抗时的分布曲线。根据上述特性，若从终端算起去掉$d_{\max}$一段后所得到的即是端接大电阻时的分布曲线；若去掉$d_{\min}$一段后即得端接小电阻时的分布曲线；若去掉$\lambda/4$段后即得端接感性复阻抗时的分布曲线。

五、驻波图形的画法

由前所述，对于一段均匀无耗线来说，其上呈现什么样的工作状态取决于终端接什么样的负载，也就是取决于终端反射系数$|\Gamma_l|$的大小。$|\Gamma_l|$的取值范围是$0 \le |\Gamma_l| \le 1$。微波系统大多数处于行驻波工作状态，行波和驻波可视为行驻波的两种极限情况，即分别对应$|\Gamma_l| = 0$和$|\Gamma_l| = 1$的情况。

把线路上任一点的$|U|$用$|U^+|$去除，即进行“归一化”，则线上任一点的电压振幅归一化值为

$$|\overline{U}| = |U|/|U^+| = |1+\Gamma| \tag{2-5-22}$$

下面分别叙述行波、驻波、行驻波曲线的作图法。

（1）行波的画法

因$|\Gamma_l| = 0$，故$\Gamma = 0$，由式（2-5-22）有$|\overline{U}| = 1$，亦即$|U| = |U^+|$，即行波电压振幅沿线到处都是一样的，其相对值（归一化值）为 1。因而行波电压曲线是一根平行于横轴的直线，如图 2-5-5 中的点划线所示。

实际上由Γ矢量图 2-5-2 可直接画出这条曲线。因$|\Gamma_l| = 0$，故$|\Gamma| = 0$，即在反射系数复平面中$|\Gamma|$由一个圆退化成一个点（原点 O），于是不论坐标z如何变化，$|\overline{U}|$的长度总是1（即由点$(-1, j0)$和O点的加线决定的长度），因而其行波曲线是一条平行于实轴的直线。

（2）驻波的画法

$|\Gamma_l| = 1$，如令$\theta = 2\beta d - \varphi_l$，则由式（2-5-8）得

$$\left|\overline{U}\right| = \sqrt{2(1+\cos\theta)} \tag{2-5-23}$$

式中，$\theta = 2\beta d - \varphi_l = 2\beta(l-z) - \varphi_l = \dfrac{4\pi}{\lambda}(l-z) - \varphi_l$ 于是根据式（2-5-23）即可绘出$\left|\overline{U}\right| \sim z$ 曲线图。其中当$\cos\theta = 1$时，出现最大值，这就是式（2-5-9）所示的$\left|\overline{U}\right|_{\max} = 2$；当$\cos\theta = -1$时，出现零值，此即式（2-5-10）所示的$\left|\overline{U}\right|_{\min} = 0$。这种驻波图形如图 2-5-5(a)中的实曲线所示。

实际上由$\varGamma$矢量图 2-5-2 也中直接画出驻波曲线。因$|\varGamma| = |\varGamma_l| = 1$，所以这时的反射系数圆将通过点（-1，$j0$），这是所有反射系数圆中最大的一个。为此，将该圆均匀分成若干段，将这些分割点分别与点（-1，0）相连，再将这些线的长度依次作为纵向高度在图上画出它们的对应点，最后将这些点连接起来就可绘出完整的驻波曲线图来。

（3）行驻波的画法

有了上面有关驻波图形的画法的认识，行驻波的有关曲线就可以直接画出。对行驻波而言，$|\varGamma_l| < 1$，即$\varGamma$圆半径均小于 1。按给定的$|\varGamma_l|$画现$\varGamma$圆，并把它等分成若干份，将这些分割点分别与点（-1，0）相连，再将这些连线的长度依次作为纵向高度在直角坐标中画出它们的对应点，最后将这些点连接起来就绘出了完整的行驻波曲线，如图 2-5-5(b)中虚线所示。

正如本节一开始提请读者注意的，行驻波曲经并非是一标准的正弦波，这一点从上述的行驻波的画法中看得更清楚了。

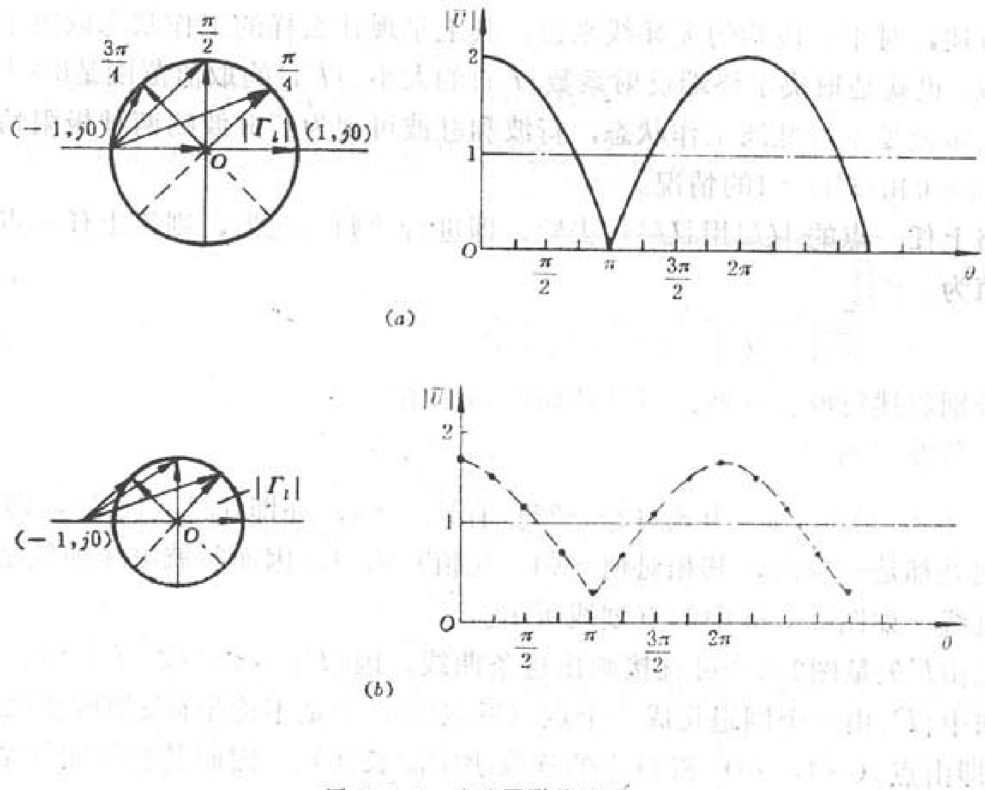


图 2-5-5 驻波图形的画法

图 2-5-5　驻波图形的画法

§2-6　行波系数和驻波系数

当负载为复数阻抗时，传输线上既有行波成分也有驻波成分。为描述线路上载行波的程度，引入行波系数和骗子波系数的概念。

一、行波系数

定义　把波节点电压（或电流）与波腹点电压（或电流）之比，称为行波系数，记以 K，即

$$K = \frac{|U|_{\min}}{|U|_{\max}} = \frac{|I|_{\min}}{|I|_{\max}} \tag{2-6-1}$$

将式（2-5-9)、(2-5-10）代入上式即可得到式（2-5-21）中所得出的结果

$$K = \frac{1 - |\Gamma_l|}{1 + |\Gamma_l|} \tag{2-6-2}$$

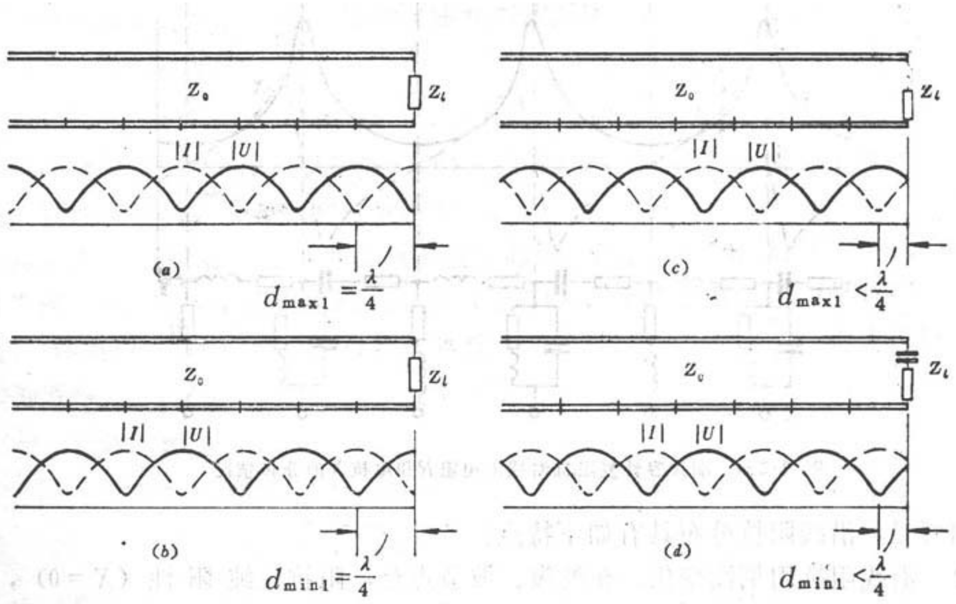
由引可见：

（1）当 $Z_l = Z_0$ 时，$|\Gamma_l| = 0,\ K = 1$，表示线上载行波；

（2）当 $Z_l = 0$、∞ 或 $\pm jX_l$ 时，$|\Gamma_l| = 1,\ K = 0$，表示线上载驻波；

（3）当 $Z_l = R_l \pm jX_l$ 时，$0 < |\Gamma_l| < 1,\ 0 < K < 1$，表示线上载行驻波。

所以，K 愈接近于 1 愈好，表明行波成分愈高。通常当 $K > 0.8$ 时，便认为传输线上载行波的程度足够高，基本达到匹配了。



(a) 小电阻负载；(b) 大电阻负载；(c) 感性复阻抗；(d) 容性复阻抗

图 2-5-3 端接一般负载时，沿线电压、电流振幅分布

二、驻波系数

实用中更多的是采用电压驻波系数（又称电压驻波比，英文缩写为VSWR）来描述传输线上的工作状态。

定义 把波腹点电压与波节点电压之比称为电压驻波系数，记以 ρ，即

$$\rho=\frac{|U|_{\max}}{|U|_{\min}} \tag{2-6-3}$$

将式（2-5-9）、（2-5-10）代入上式即可得到式（2-5-20）中所导出的结果

$$\rho=\frac{1+|\Gamma_l|}{1-|\Gamma_l|} \tag{2-6-4}$$

根据定义可知 K 与 ρ 互为倒数关系，即 $\rho=1/K$。由此可见：

（1）当当 $Z_l=Z_0$ 时，$|\Gamma_l|=0,\ \rho=1$，表示线上载行波；

（2）当 $Z_l = 0$、∞ 或 $\pm jX_l$ 时，$|\Gamma_l| = 1,\ \rho = \infty$，表示线上载驻波；

（3）当 $Z_l = R_l \pm jX_l$ 时，$|\Gamma_l| < 1,\ 1 < \rho < \infty$，表示线上载行驻波。

因此，ρ 愈接近于 1 愈好，ρ 愈小表示含驻波成分愈低、含行波成分愈高。实用中对 ρ 有一定的要求，例如对雷达馈电系统一般要求 $\rho \le 1.5$；微波测量中一般要求 $\rho \le 1.2$ 或更小。

三、两个重要关系式

根据式（2-6-2）和（2-6-4）可得到终端反射系数模值 $|\Gamma_l|$ 与行波系数、驻波系数的关系式为

$$|\Gamma_l| = \frac{1-K}{1+K} \tag{2-6-5}$$

$$|\Gamma_l| = \frac{\rho-1}{\rho+1} \tag{2-6-6}$$

就是说，当传输线上的行波系数 K 或驻波系数 ρ 已知时，利用式（2-6-5）或式（2-6-6）求出终端反射系数模值 $|\Gamma_l|$ 来。反之当已知 $|\Gamma_l|$ 时，亦可利用式（2-6-2）或式（2-6-4）求出 K 或 ρ 来。

§2-7　传输功率及传输效率

一、传输功率

对于无耗线路，通过其上任一点的平均功率都应该相等，可通过线上任一点的电压和电流来计算。为简化计算，可以取波腹点和波节点处的电压、电流来进行，因为在这些特殊点处的电压和电流同相位，阻抗呈纯阻性，这可使功率计算大为简化。令传输线上的传输功率为 P，则

$$P = \frac{1}{2}|U|_{\max} \bullet |I|_{\min} = \frac{1}{2}|U|_{\min} \bullet |I|_{\max} \tag{2-7-1}$$

将式（2-5-11）、（2-5-12）代入上式，考虑到式（2-6-1）则有

$$P=\frac{1}{2}\frac{|U|_{\max}^{2}}{Z_0}\bullet K=\frac{1}{2}|I|_{\max}^{2}\bullet Z_0\bullet K \tag{2-7-2}$$

由此可见，当传输线的耐压一定或所能承载的电流一定时，行波系数 K 愈大（线上匹配的愈好），所能传输的功率亦愈大。

现在研究负吸收功率（记以 P_l ）的情况。

设终端处电压、电流分别为 U_l 、 I_l ，则

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{2}|U_l|\bullet|I_l|=\frac{1}{2}(|U_l^+|+|U_l^-|)\bullet(|I_l^+|-|I_l^-|)\\&=\frac{1}{2}|U_l^+||I_l^+|-\frac{1}{2}|U_l^-||I_l^-|+\frac{1}{2}|U_l^-||I_l^+|-\frac{1}{2}|U_l^+||I_l^-|\end{aligned}$$

因 $|U_l^-|=|\varGamma_l||U_l^+|$ 及 $|I_l^-|=|\varGamma_l||I_l^+|$ ，故上式后两项抵消而变成为

$$P_l=\frac{1}{2}|U_l^+||I_l^+|-\frac{1}{2}|U_l^-||I_l^-|=P_l^+-P_l^- \tag{2-7-3}$$

式中， $P_l^+=\frac{1}{2}|U_l^+||I_l^+|$ ——称为入射波平均功率；

$P_l^-=\frac{1}{2}|U_l^-||I_l^-|$ ——称为以射波平均功率。

于是得出结论：终端负载吸收的功率等于入射波功率减去反射波功率。

若计及损耗，则电压、电流应引入衰减因子 α 。此时的传播常数为 $\gamma=\alpha+j\beta$ 。因此，有耗传输线路上的电压、电流表达式可写成

$$\begin{aligned}U&=U^++U^-=Ae^{-\gamma z}+Be^{\gamma z}\\&=A\left[e^{-(\alpha+j\beta)z}+\left|\frac{B}{A}\right|e^{j\varphi_l}e^{(\alpha+j\beta)z}\right]\\&=A\left[e^{-(\alpha+j\beta)z}+|\varGamma_l|e^{j\varphi_l}e^{(\alpha+j\beta)z}\right]\end{aligned} \tag{2-7-4}$$

$$I=I^+-I^-=\frac{A}{Z_0}\left[e^{-(\alpha+j\beta)z}-|\varGamma_l|e^{j\varphi_l}e^{(\alpha+j\beta)z}\right] \tag{2-7-5}$$

式中， Z_0 仍设为实数，于是有耗线上的传输功率为

$$P=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[U\bullet I^*]=\frac{1}{2}\frac{|A|^2}{Z_0}\left[e^{-2\alpha z}-|\varGamma_l|^2e^{2\alpha z}\right] \tag{2-7-6}$$

式中， $|A|$ 是入射波电压振幅，当 $Z_g=Z_0$ 时，其值由式（2-3-17）给出。

二、功率容量

传输线上的电压、电流不可以任意大，而是受到击穿电压和最大载流量的限制。若线上电压超过击穿电压时，传输线中的绝缘介质将被击穿，轻者使传输线的效率显著降低，严重时，传输线会被损坏无法再现。

实际工作中，常用“功率容量”来描写传输线是否处于容许的工作状态。所谓传输线的功率容量就是在不发生电击穿条件下，传输线上允许传输的最大功率或称极限功率。

设U_{br}为击穿电压，根据式（2-7-2）功率容量可写成

$$P_{br}=\frac{1}{2}\frac{\left|U_{br}\right|^{2}}{Z_{0}}\bullet K \tag{2-7-7}$$

可见，功率容量不仅与击穿电压有关（每一种传输线都具有一定的击穿电压值，它由传输线的结构、材料、填充介质等因素所决定)，还与线上的工作状态有关。K 愈接近于 1，即线上愈接近行波状态，功率容量就愈大。若传输功率一定，K 愈大，则可选用击穿电压定额愈小的传输线，使传输线更经济轻便。因此，从功率容量角度也可以说明，传输线的最佳状态是行波工作状态。

三、传输效率

传输线的主要功能之一是传输能量，我们用传输线的传输效率来表征它的传输效率，记以η，即

$$\eta=P_{l}/P_{in}(\%) \tag{2-7-8}$$

传输效率η常用%计。将$z=0$代入式（2-7-6）中即得传输线的输入功率为

$$P_{in}=\frac{1}{2}\frac{\left|A\right|^{2}}{Z_{0}}(1-\left|\Gamma_{l}\right|^{2}) \tag{2-7-9}$$

负载吸收的功率为

$$P_{l}=\frac{1}{2}\frac{\left|A\right|^{2}}{Z_{0}}(e^{-2\alpha l}-\left|\Gamma_{l}\right|^{2}e^{2\alpha l}) \tag{2-7-10}$$

将上式代入式（2-7-8）中，得到

$$\eta = \frac{e^{-2\alpha l} - |\Gamma_l|^2 e^{2\alpha l}}{1 - |\Gamma_l|^2} (\%) \tag{2-7-11}$$

将指数函数换写成双曲函数并考虑到式（2-6-2）的关系，上式可改写成

$$\eta = ch2\alpha l - \frac{1}{2}\left(K + \frac{1}{K}\right) sh2\alpha l (\%) \tag{2-7-12}$$

当传输线损耗很小，线又不长，满足$\alpha l << 1$时，式（2-7-12）可简化为

$$\eta = 1 - \left(K + \frac{1}{K}\right)\alpha l\ (\%) \tag{2-7-13}$$

由上式可见，传输率η与传输线的衰减常数α、线的长度l及工作状态K有关。将它们之间的关系绘成$\eta \sim K$关系曲线，如图 2-7-1 所示。

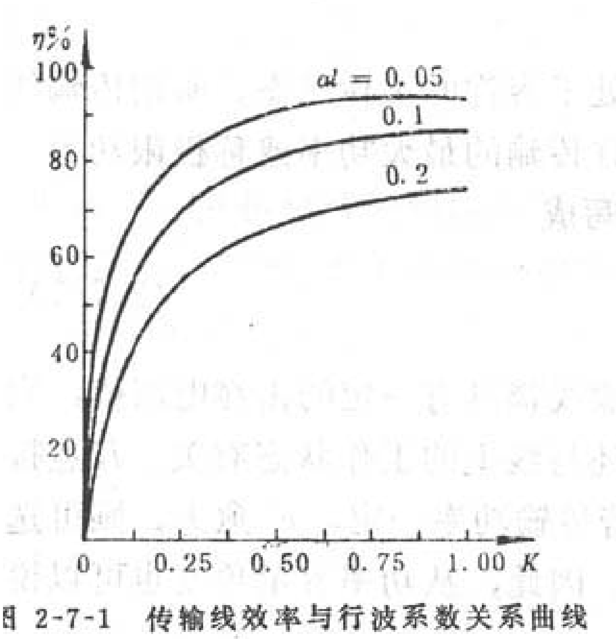


图 2-7-1　传输线效率与行波系数关系曲线

显然，α愈大，线上损耗愈大，η就愈低；当αl一定时，K 愈大，即

线上行波成分愈大，传输线率η愈高。当 K=1，即线上载行波时，η具有最大值，由式（2-7-13）可得

$$\eta = \eta_{\max} = 1 - 2\alpha l \approx e^{-2\alpha l} \tag{2-7-14}$$

这一点由式（2-7-11），将$|\Gamma_l| = 0$即（K=1）人入也可得到。

可见，欲提高传输效率，应尽量使传输线载行波。但由上图可以看出，当$K < 0.5$时，η随K变化迅速，表明K对η的影响很大；当$K > 0.5$之后，K 再提高，η的提高甚微，所以仅从效率观点来看，只要求$K > 0.5$即可。

§2-8　阻抗圆图

在微波与天线工程中，常遇到阻抗的匹配与计算问题。利用前面推导出来的有关公式完全可以计算，但过程繁琐，很不方便。简化计算的有效方法是图解法。本章将讨论的阻抗圆图就是其中一种方法。

常用的阻抗圆图有两种，一种是极坐标圆图，一种是直角坐标圆图。前者又称史密斯（Smith）圆图，它在微小领域中有着非常广泛的应用。

史密斯圆图由等反射系数圆族、等电阻圆族和等电抗圆族组成。

一、等反射系数圆族

地均匀传输线，当终端负载阻抗Z_l一定时，传输线的反射也就一定。线上任一点的反射系数可写成复数形式

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta} = \Gamma_\alpha + j\Gamma_b \tag{2-8-1}$$

或

$$\Gamma_a^2 + \Gamma_b^2 = |\Gamma|^2$$

可见这是一个圆方程式，圆心为（0，0），半径为$|\Gamma| = |\Gamma_l|$。当Z_l不同时，由式（2-4-7）算出的$|\Gamma_l|$也不同，因而有不同的Γ圆。通常由于$0 \le |\Gamma_l| \le 1$，故复平面上所绘的等反射系数圆是以原点为圆心，以$|\Gamma_l|$为半径的同心圆族。最小的$|\Gamma_l| = 0$圆退化为点，此点即所谓的“匹配点”，它落在复平面坐标原点 O 上；最大的$|\Gamma_l| = 1$，是最外圆，它代表全反射系数的轨迹，如

图 2-8-1 所示。

我们知道，$|\Gamma_l|$与驻波系数ρ或行波系数 K 有一一对应关系（参见式（2-6-2）、（2-6-4）），故等Γ与圆又代表等ρ圆或等 K 圆。读者稍后可以知道，这些ρ圆或K圆的具体数值可直接由圆图中读出。

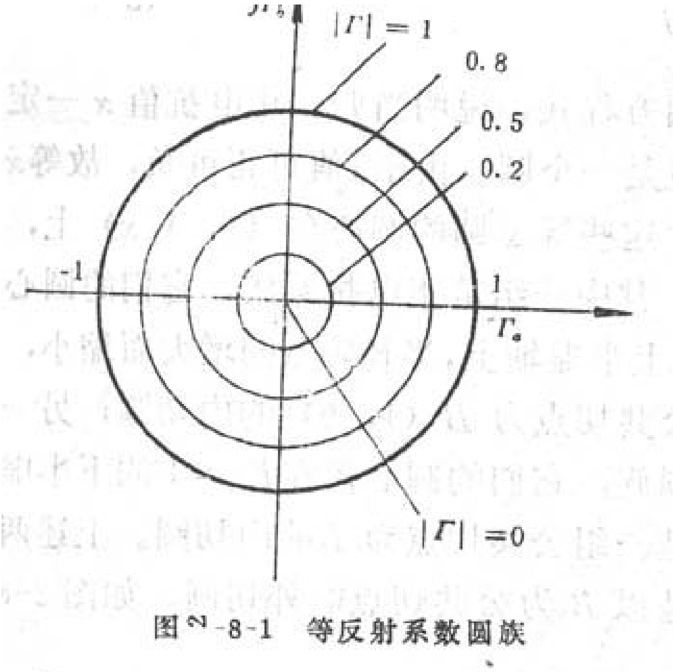


图 2-8-1　等反射系数圆族

二、等电阻圆族

根据传输线阻抗定义

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U^+ + U^-}{I^+ - I^-} = \frac{U^+}{I^+} \bullet \frac{1 + U^- / U^+}{1 - I^- / I^+} = Z_0 \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \tag{2-8-2}$$

可求得阻抗归一化值为

$$\overline{Z} = Z / Z_0 = 1 + \Gamma.1 - \Gamma = r + jx \tag{2-8-3}$$

式中，$r = R / Z_0$为归一化电阻，$x = X / Z_0$为归一化电阻。将式（2-8-1）代入上式，有

$$r + jx = \frac{1 + \varGamma_a + j\varGamma_b}{1 - \varGamma_a - j\varGamma_b}$$

将上式右方分母有理化，分离实、虚部，再使等式两边实部、虚部分别相等，可得关系

$$r = \frac{(1 - \varGamma_a^2) - \varGamma_b^2}{(1 - \varGamma_a)^2 + \varGamma_b^2} \tag{2-8-4}$$

$$x = \frac{2\varGamma}{(1 - \varGamma_a)^2 + \varGamma_b^2} \tag{2-8-5}$$

式（2-8-4）表示当 r 值一定时，r 在反射系数复平面 $(\varGamma_a, j\varGamma_b)$ 中的轨迹。经变换后得

$$\left(\varGamma_a - \frac{r}{r+1}\right)^2 + \varGamma_b^2 = \left(\frac{1}{r+1}\right)^2 \tag{2-8-6}$$

这是一个以 $\varGamma_a$、$\varGamma_b$ 为坐标变量，以 r 为参变量的圆方程式。画在复平面中是一组圆，这就是等电阻圆族，其圆心在 $(r/r+1,\ 0)$ 上，半径为 $1/r+1$。因 $0 \le r \le \infty$，故可绘出无穷多个电阻圆，它们的圆心都在实轴 $\varGamma_a$ 上，且圆心的横坐标 $(r/r+1)$ 与半径 $(1/r+1)$ 之和恒等于 1，因此等 r 圆是一组公共切点为 B（1，0）内切圆族，如图 2-8-2 所示。

当 $r = 0$ 时，此圆之圆心为（0，0），即在坐标原点上，半径为 1，是最外一层电阻圆，与 $|\varGamma| = 1$ 圆重合。随 r 增加，等 r 圆的圆心沿正实轴逐渐远离坐标原点。当 $r = \infty$ 时，该圆之圆心在（1，0）点，即 B 点上，半径为 0，即圆退化为一个点，它对应电阻为无穷大，故称此点为“开路点”。

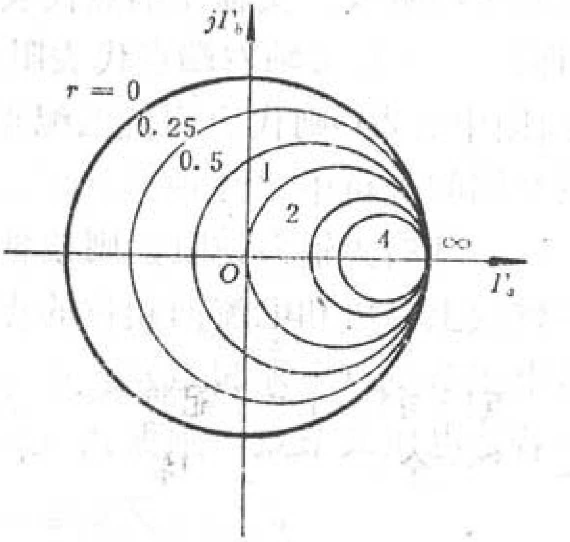


图 2-8-2 等电阻圆族

图 2-8-2　等电阻圆族

三、等电抗圆族

将式（2-8-5）换写成

$$(\Gamma_a - 1)^2 + \left(\Gamma_b - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \tag{2-8-7}$$

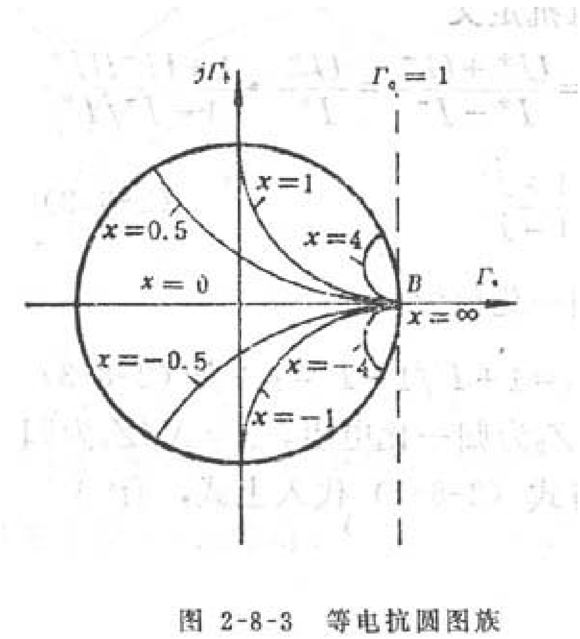


图 2-8-3 等电抗圆图族

这也是一个圆方程式，说明当归一化电抗值 x 一定时，其轨迹也是一个圆。由于 x 圆的圆心在（1，1/x）上，半径为 $1/x$。其中一组是正电抗圆族，它们的圆心落在 $\Gamma_a = 1$ 的上半虚轴上，半径随 x 的增大而缩小，它们是一组公共切点为 $B(1,0)$的内切圆；另一组是负电抗圆族，它们的圆心落在 $\Gamma_a = 1$ 的下半虚轴上，这也是一组公共切点为 B 的内切圆。上述两组内切圆又是以 B 为公共切点的外切圆。如图 2-8-3 所示。

因为有用部分仅限于 $|\Gamma| = 1$ 的圆内，故等 x 圆的其余部分不画出。

不难看出，当 $x = \pm\infty$ 时，圆心在（1，0）上，半径为 0，等 x 圆退化为一个点（即图中之 B 点），它对应电抗为无穷大，此即上述之“开路点”。

四、史密斯圆图

将图 2-8-1~2-8-3 重迭一起即构成完整的阻抗圆图，因该图最早是由史密斯完成的，故又称为史密斯圆图，如图 2-8-4 所示。

由上面分析可知，图 2-8-4 的任一点都可读出四个量值：r、x、$|\Gamma|$、

φ。只要知道其中两个量，就可根据圆图求出另外两个量。

1．圆图实轴上半圆内的等x圆曲线代表感性电抗，即$x>0$；故上半圆中各点代表各不同数值的感性复阻抗归一化值。

2．圆图实轴下半圆内等x圆曲线代表容性电抗，即$x<0$；故下半圆内各点代表各种不同数值的容性复阻抗归一化值。

3．当$x=0$（即纯阻）时，等x圆的半径为∞，等x圆就退化成实轴线了，因此实轴代表的是纯阻线。实轴左端点代表阻抗短路点，因该点的$r=0$、$x=0$、$|\Gamma_l|=1$、$\varphi_l=\pi$，即$|\Gamma_l|=-1$。实轴右端点代表阻抗开路，因该点的$r=\infty$、$x=\infty$、$\Gamma_l=|\Gamma_l|e^{j\varphi_l}=1$。圆图中心点$O$则代表阻抗匹配点，因该点的$r=1$、$x=0$、$|\Gamma_l|=0$，这一点在上面等反射系数圆的分析中已经预见到了。

4．既然实轴为纯阻，则该轴上各点均有$x=0$、$Z=r$，这些点表明它们所对应的是传输线上电压和电流同相位的点。由§2-5知，这些点要么是电压腹点（电流节点）要么是电压节点（电流腹点）。

若是电压波节点，则据式（2-5-21）有

$$r_{\min}=\overline{Z}_{\min}=\frac{Z_{\min}}{Z_0}=K \tag{2-8-8}$$

上式表明负实轴上的归一化电阻r值，也表示此时传输线的行波系数K值。

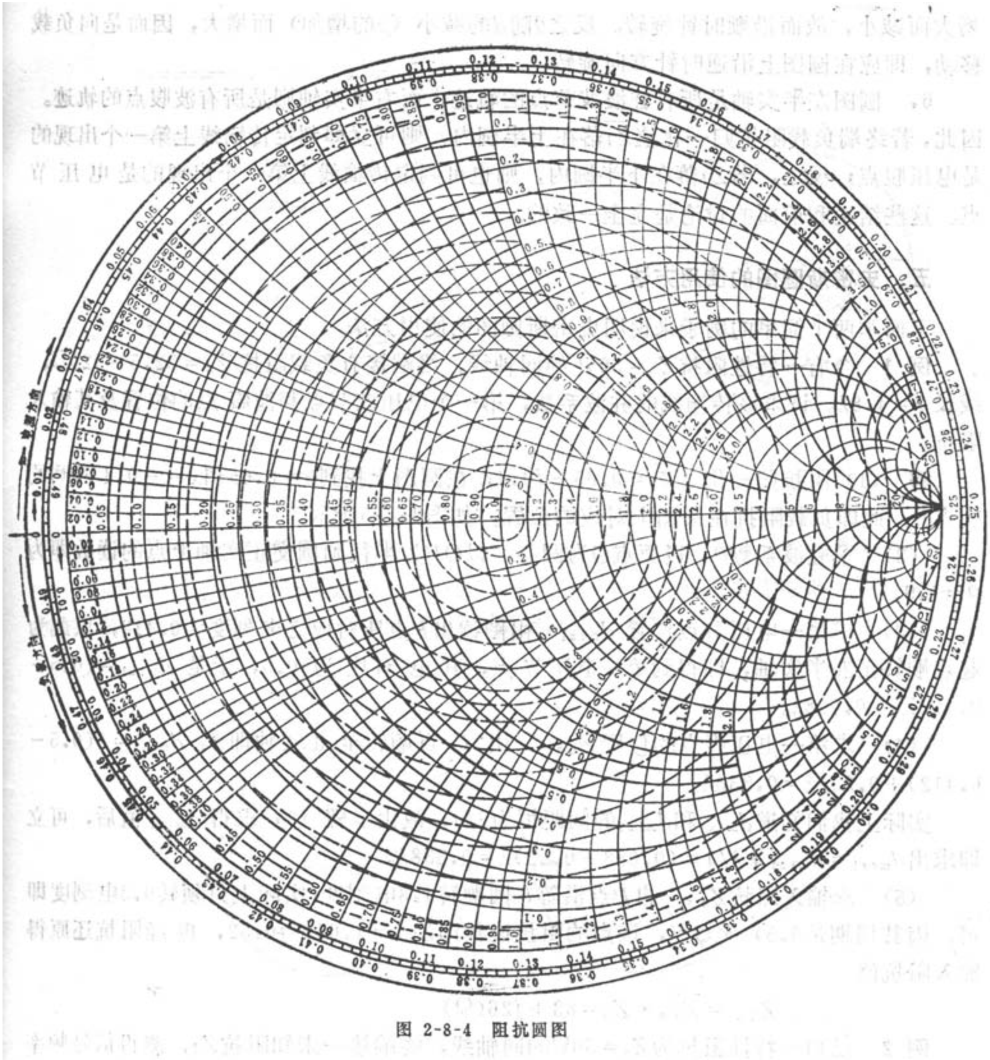


图 2-8-4　阻抗圆图

若是电压波腹点，则据式（2-5-10）有

$$r_{\max} = \overline{Z}_{\max} = \frac{Z_{\max}}{Z_0} = \rho \tag{2-8-9}$$

这表明正实轴上的归一化电阻r值，也表示此时传输线的驻波系数ρ值。

5．在圆图最外圈标有电刻度（又称波数，实际上是线上某点离终端的距离$d=(l-z)\lambda$与波长的比值，即其相对长度d/λ）。通常选实轴左端点 A

为起算点，旋转一周为 0.5。圈外刻度按顺时针方向增加，用箭头示出“向电源方向”。圈内刻度按逆时针方向增加，用箭头示出“向负载方向”。这是很好理解的，因为

$$\theta = \varphi_l - 2\beta(l - z) = \varphi_l - 2\beta d$$

随 d 的增大（即 z 减小），所研究的点在向信号源方向移动。上式中 φ_l 一定，则 θ 随 d 增大而减小，故而沿顺时针旋转。反之 θ 随 d 的减小（z 的增加）而增大，因而是向负载移动，即应在圆图上沿逆时针方向旋转。

6．圆图左半实轴是所在驻波波节点的轨迹，而右半实轴则是所有波腹点的轨迹。因此，若终端负载阻抗归一化值 $\overline{Z}_l$ 落在上半圆内，则可立即判定传输线上第一个出现的是电压腹点；反之，若 $\overline{Z}_l$ 落在下半圆内，则也可判定传输线上第一个出现的是电压节点。这些结论和前面的讨论是完全一致的。

五、史密斯圆图的使用方法

下面举两个简单的例子来说明史密斯圆图的使用方法。

例 1　今有一特性阻抗 $Z_0 = 50\Omega$ 的同轴线，终端接有负载阻抗 $Z_l = 32.5 - j20\Omega$，线长 $l = 4.8\lambda$。试求该传输线的驻波系数，第一个电压波节点和波膜点的位置及其输入阻抗。

解　(1)阻抗归一化 $\overline{Z}_l = 0.65 - j0.4$，在圆图上找到 $r = 0.65$ 和 $x = -0.4$ 两圆的交点 P，此即负载阻抗在圆图上对应的位置，如图 2-8-5 所示。

（2）求驻波系数 ρ，以原点 O 为圆以，以 OP 为半径画圆交正实轴上点的读数即为 $\rho = 1.9$。

（3）求第一电压节点位置 $d_{\min 1}$，由图读出 P 眯所对应之电刻度为 0.412，以此为起点顺转至左半实轴，即得第一电压节点，其电刻度为 0.5，于是 $d_{\min 1} = (0.5 - 0.412)\lambda = 0.088\lambda$。

（4）求第一电压腹点的位置 $d_{\max i}$，由 P 点顺转至正实轴即得 $d_{\max 1} = \left[(0.5 - 0.412) + 0.25\right]\lambda = 0.338\lambda$。

实际上我们知道$d_{\max 1}$和$d_{\min 1}$的间距恒为$\lambda/4$，故由步骤（3）求得$d_{\min 1}$值后，可立即求出$d_{\max 1}=d_{\min 1}+\lambda/4=(0.088+0.25)\lambda=0.338\lambda$。

（5）求输入阻抗Z_{in}，自 P 点沿等$\varGamma$圆顺转 4.8 电刻度（实际上只须转 0.3 电刻度即可，因其周期是 0.5）到 Q 点，该点的阻抗读数即$\overline{Z}_{in}=1.66+j0.52$，再经阻抗原得输入阻抗值

$$Z_{in}=\overline{Z}_{in}\bullet Z_0=83+j26(\varOmega)$$

例 2　已知一特性阻抗为$Z_0=50\varOmega$的同轴线终端接一未知阻抗Z_l，测得信号频率为 $f=1GHz$，电压驻波系数 $\rho=3.0$，驻波节点的距离 $d_{\min 1}=3.0\,\text{cm}$。试求$Z_l$。

解　（1）在圆图正实轴上找到$r_{\max}=\rho=3.0$的点 A，以 O 为圆以，在负实轴上找到对称点 B，如图 2-8-6 所示。

（2）由测得之 f 算出波长$\lambda=c/f=30\,\text{cm}$，再算得$d_{\min 1}/\lambda=0.1$。

（3）由 B 点沿等$\varGamma$圆逆转电刻度 0.1 至 C 点，此即为负载阻抗归一化值在圆图中所对应的位置，由图读得$\overline{Z}_l=0.48-j0.61$。

（4）阻抗还原　$Z_l=\overline{Z}_l\bullet Z_0=24-j31(\varOmega)$

六、导纳圆图

实用中，在遇到并联电路时用导纳比用阻抗计算方便得多，这就需要导纳圆图。

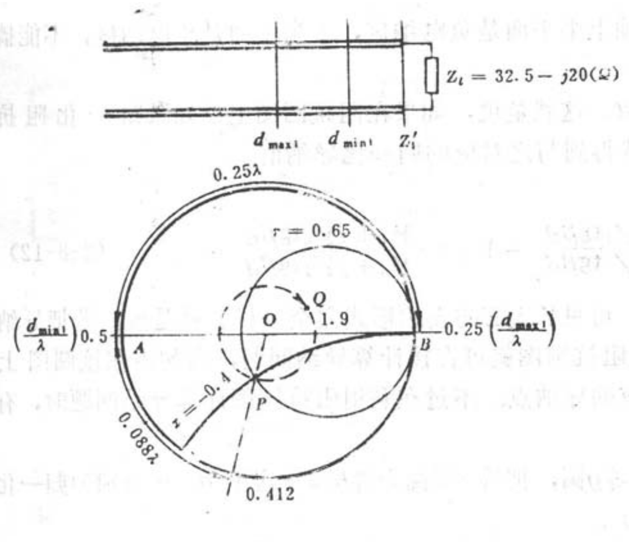


图 2-8-5　例 1 图

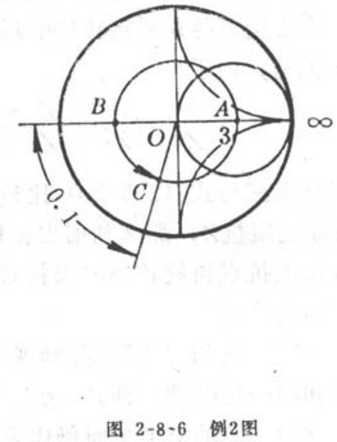


图 2-8-6　例 2 图

导纳圆图也包括三个圆族：等Γ圆族、等电导（等 g）圆族和等电纳（等 b）圆族，如图 2-8-7 所示。可以证明，导纳圆图只是阻抗圆图的翻后天。

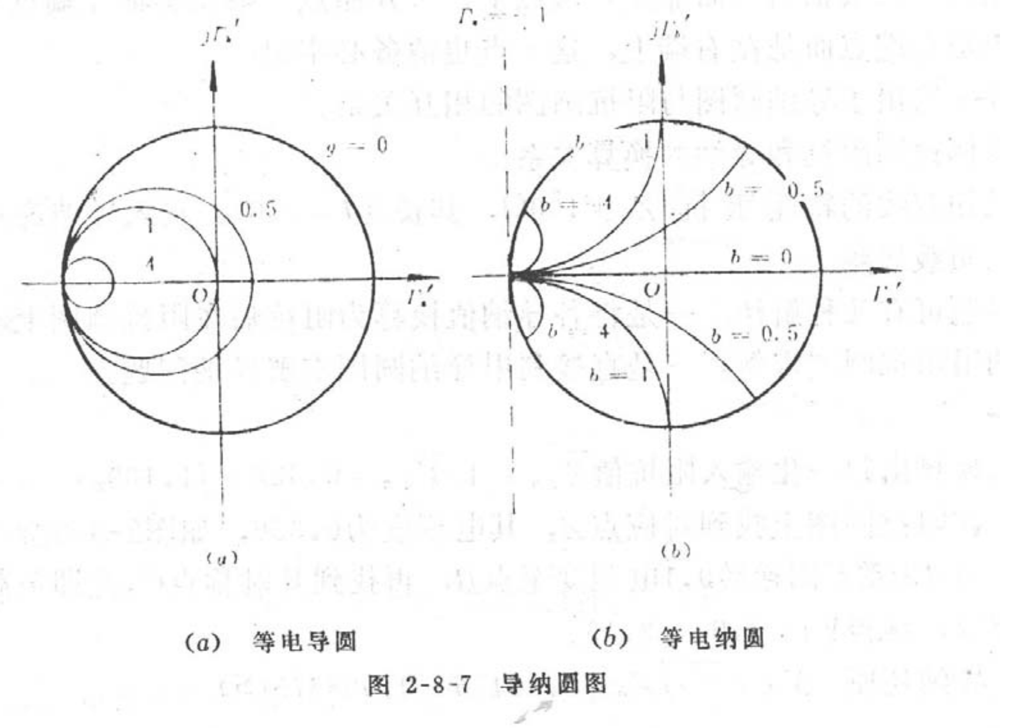


图 2-8-7　导纳圆图

因为

$$\overline{Z}=\frac{Z}{Z_0}=\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}=\frac{1+\left|\Gamma_l\right|e^{j(\varphi_l-2\beta d)}}{1-\left|\Gamma_l\right|e^{j(\varphi_l-2\beta d)}} \tag{2-8-10}$$

所以归一化导纳为

$$\overline{Y}=\frac{1}{\overline{Z}}-\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}=\frac{1+\left|\Gamma_l\right|e^{j[(\varphi_l-2\beta d)+\pi]}}{1-\left|\Gamma_l\right|e^{j[(\varphi_l-2\beta d)+\pi]}} \tag{2-8-11}$$

比较上二式发现，二者的形式完全一样，只是后式中幅角多了一个π。这就是说只要把阻抗圆图上诸点均旋转 180°，就得到与之对称的导纳圆图。

需要注意的是，导纳圆图实轴上半平面是负电纳区，下半平面是正电纳区，不能搞错。

事实上，阻抗和导纳互为例数。这就是说，如果在阻抗圆图上已知某

归一化阻抗点，那么沿着等Γ圆旋转 180° 后就得到与之对应的归一化导纳值。

但是，由于

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{Z_0}\frac{Z_0+jZ_l tg\beta d}{Z_l+jZ_0 tg\beta d}=Y_0\cdot\frac{Y_l+jY_0 tg\beta d}{Y_0+jY_l tg\beta d} \tag{2-8-12}$$

所以将上式与式（2-3-20）比较，可见Y与 Z 的表达形式完全一样。就是说。若把导纳 Y 看成是阻抗 Z，那么利用史密斯阻抗圆图就可直接计算导纳问题，而勿需在该圆图上先找出阻抗点再旋转 180° 去找对应的导纳点，不过在利用阻抗圆图计算导纳问题时，有几点需要注意。

（1）应如实地把等r圆视为等g圆，把等x圆视为等b圆（这里g、b分别为归一化电导和归一化电纳，即$\overline{Y}=g\pm jb$）。

（2）实轴上半平面仍代表正电纳（$+jb$），下半平面仍代表负电纳（$-jb$）。这是与导纳圆图的不同之处，必须记住。

（3）实轴为纯导轴（即实轴上各点之$b=0$），此时导纳“匹配点”仍在坐标原点，“短路点”在实轴右（而非左）端点上，“开路点”则在实轴左端点上。电刻度的起算点不再是左端点而是右端上，这一点也请务必牢记。

图 2-8-8 绘出了导纳圆图与阻抗圆图的相互关系。

下面举例说明阻抗和导纳换算关系。

例　已知双线的特性阻抗$Z_0=400\Omega$，其长度$l=0.6\lambda$，输入导纳为$\overline{Y}_{in}=0.35-j0.735$，求负载导纳。

解　本题可有几种解法。一是将各导纳值换算为阻抗后在阻抗圆图上求解；二是将导纳问题利用阻抗圆图求解；三是直接利用导纳圆图求解导纳问题。

解法一

（1）换算出归一化输入阻抗值$\overline{Z}_{in}=1/\overline{Y}_{in}=0.528+j1.109$。

（2）在阻抗圆图上找到对应点 A，其电刻度为 0.356，如图 2-8-9 所示。

（3）由 A 沿等 Γ 圆逆转 0.1 电刻度至点 B，再找到其对称点 C，此即负载导纳在圆图上的对应位置，读得 $\overline{Y}_l = 1.9 - j2.15$。

（4）导纳还原 $Y_l = \overline{Y}_l / Z_0 = 0.00475 - 0.005375(S)$。

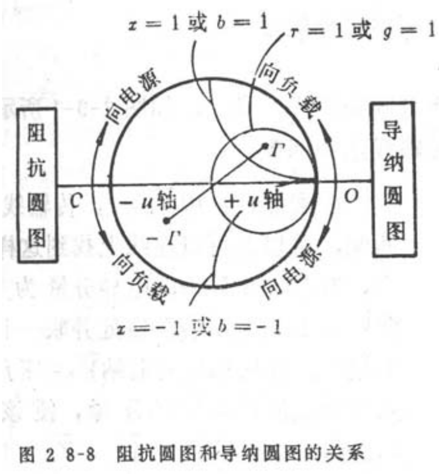
解法二

这是利用阻抗圆图计算导纳问题，即

（1）在阻抗圆图上根据题意给出的 $\overline{Y}_{in} = 0.35 - j0.735$，找到 $g = 0.35$（如实地看成为 $r = 0.35$ 的圆）和 $b = -0.745$（如实地看成为 $x = -0.735$ 的圆），两圆的交点为 A，其电刻度为 0.106，如图 2-8-10 所示。

（2）由 A 沿等 Γ 圆逆转 0.1 电刻度至点 B，读得 $\overline{Y}_l = 1.9 - j2.15$。

（3）导纳还原　$Y_l = 0.00475 - j0.007375(S)$。



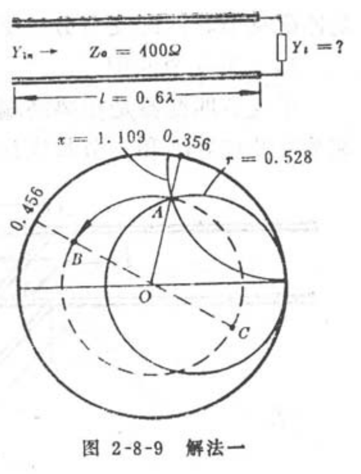


图 2-8-8　阻抗圆图和导纳圆图的关系　　　　图 2-8-9 解法一

解法三

利用导纳圆图求解，即

（1）在导纳圆图上找出 $g = 0.35,\ b = -0.735$ 两圆交点 A，其电刻度为 0.356，如图 2-8-11 所示。

（2）由点 A 沿等 Γ 圆逆转 0.1 电刻度至 B 点，读得 $\overline{Y}_l = 1.9 - j2.15$。

（3）导纳还原　$Y_l = 0.00475 - j0.005375(S)$。

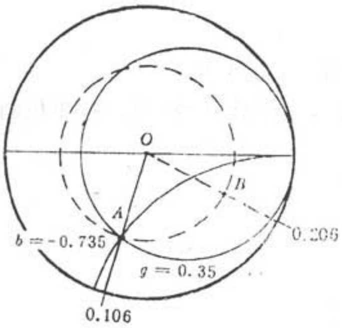


图 2-8-10　解法二

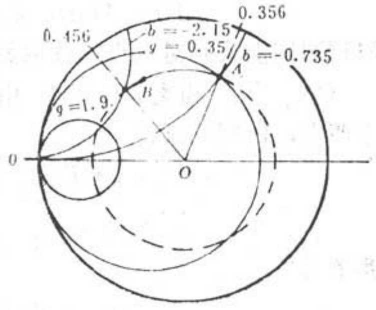


图 2-8-11　解法三

图 2-8-10　解法二　　　图 2-8-11　解法三

§2-9　传输线的阻抗匹配

当负载阻抗Z_l与传输线路之特性阻抗Z_0不相等时，将产生反射波，使负载得到的功率减少。利用传输线路的阻抗变换作用，可使负载的视在阻抗等于Z_0，从而使反射波消失，线路呈现行波状态。这就是阻抗匹配。这类问题完全可以利用史密斯圆图加以解决。

一、支节匹配

这类匹配装置是在主传输线上并联适当的电纳，以产生附加反射来抵消主线上原存的反射波达到匹配的目的。此电纳元件可用短路线或开路线跨接在主线上来实现，这就是匹配支节。匹配支节分单支、双支和三支节，下面将分述之。

1．单支节匹配

单支节匹配器是在离终端适当位置上并联一可调短路线构成的，如图 2-9-1 所示。调节支节位置d_1和支节长度l_1，使AA'左边主传输线达到匹配。

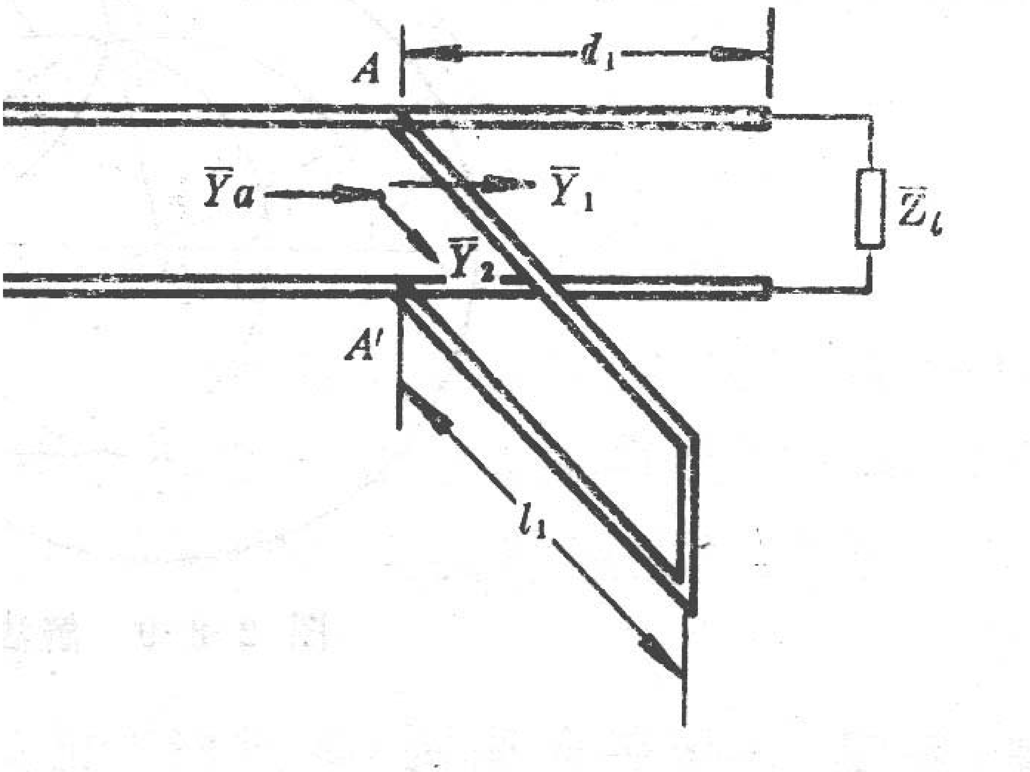


图 2-9-1 单支节匹配

图 2-9-1 单支节匹配

匹配原理：因$\overline{Z}_l \neq 1$，传输线不匹配，所以总可以在线上找到这样一点，其归一化导纳的电导分量为 1，即$\overline{Y}_1 = 1 \pm jb_1$。若在该处并联一个大小相等、性质相反的电纳$\overline{Y}_2 = \mp jb_1$，就可以抵消$\overline{Y}_1$的电纳分量，使该处的总归一化导纳$\overline{Y}_a = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 = 1$，即$\overline{Z}_a = 1$，从而使主传输线获得匹配。

例 1 无耗传输线的特性阻抗为 300Ω，终接阻抗为$Z_l = 150 + j450\Omega$的负载，拟彩霞单支节匹配，求支节的位置与长度。

解

（1）先归一化

$$\overline{Y}_l = 1/\overline{Z}_l = Z_0 / Z_l = 0.2 - j0.6$$

在阻抗圆图上找到对应点，读取其电刻度为 0.412，如图 2-9-2 所示。

（2）求$\overline{Y}_1$和支节位置 d　由$\overline{Y}_l$点沿等$\varGamma$圆顺转与$g=1$的圆（该圆称为“单位圆”）交于两点，由圆图读得

$\overline{Y}_1 = 1 + j2.2$　　电刻度为 0.19

$\overline{Y}' = 1 - j2.2$　　电刻度为 0.308

由此求得

$d = [(0.5 - 0.412) + 0.192]\lambda = 0.28\lambda$

$d' = [(0.5 - 0.412) + 0.308]\lambda = 0.396\lambda$

（3）求支节长度l　　短路支节的归一化输入导纳为

$\overline{Y}_2 = \overline{Y}_a - \overline{Y}_1 = -j2.2$　　电刻度为 0.318

$\overline{Y}_2' = \overline{Y}_a - \overline{Y}_1' = j2.2$　　电刻度为 0.182

于是得到短路支节的长度为

$l = (0.318 - 0.25)\lambda = 0.068\lambda$

$l' = (0.182 + 0.25)\lambda = 0.432\lambda$

注：

①支节位置与支节长度的解有两组，均可实现匹配要求，但为使匹配装置紧凑，通常选用其中较短的一组。

②在求支节长度时，需将$\overline{Y}_2$（或$\overline{Y}_2'$）的电刻度减去（或加上）0.25λ，其原因已在上节中提请读者注意过。图 2-8-8 已清楚表明，导纳计算时的起点是从电刻度 0.25 开始的。

2．双支节匹配

双支节匹配器是在单支节旁再加一支节，保持二支节的位置不动，只靠调节二支节的长度达到匹配目的的一种装置，如图 2-9-3 所示。其中二支节的间距d_2一般取$\lambda/8$或其整数倍，但不能取$\lambda/2$。

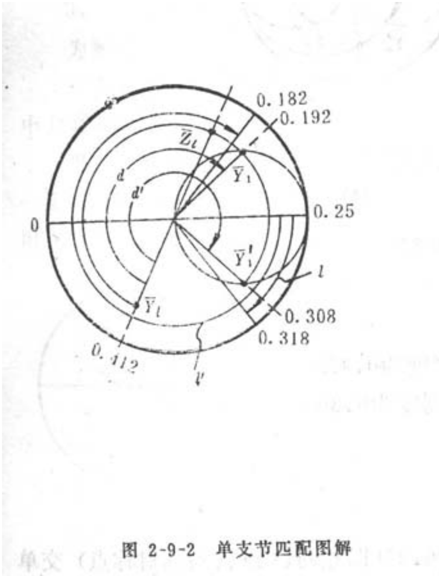


图 2-9-2　单支节匹配图解

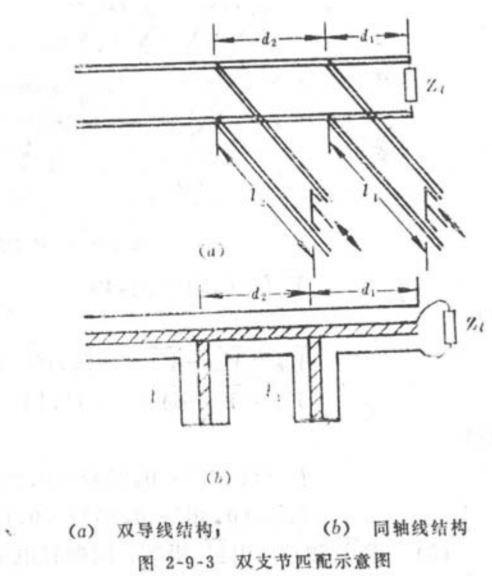


图 2-9-3　双支节匹配示意图

匹配原理：参阅图 2-9-4(a)，在 A、B 处各接一终端可调短路线，各处归一化导纳存在如下关系：$\overline{Y}_a = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2$，$\overline{Y}_b = \overline{Y}_3 + \overline{Y}_4$。为使主传输线匹配（即 $\overline{Y}_b = 1$），必须使 $\overline{Y}_3 = 1 \pm jb_3$，即应使 $\overline{Y}_3$ 落在 $g_3 = 1$ 的单位圆上；再调节 l_2，产生 $\overline{Y}_4 = \mp jb_3$ 的电纳，以抵消 $\overline{Y}_3$ 中的电纳分量，使 $\overline{Y}_b = 1$ 而达到匹配。为使 $\overline{Y}_3$ 落在单位圆上，就要求 $\overline{Y}_a$ 落在“辅助圆”上（见图 2-9-4(b)，其中选取 $d_2 = \lambda/4$），至于 $\overline{Y}_a$ 落在辅助圆的什么位置上，这要由 $\overline{Y}_1$ 中的电导 g_1 来决定，它们的关系是 $g_a = g_1$。由于

$$\overline{Y}_a = g_a + jb_a$$
$$\overline{Y}_1 = g_1 + jb_1$$

所以要求 $\overline{Y}_2 = \overline{Y}_a - \overline{Y}_1 = j(b_a - b_1)$。这是可以通过调节支节 I 的长度 l_1 来实现的。

下面举例说明实现双支节匹配的具体过程。

例 2　特性阻抗为 $Z_0 = 50\Omega$ 的同轴线，终接负载阻抗 $Z_l = 100 + j50\Omega$，$d_1 = 0.15\lambda,\ d_2 = \lambda/4$，试求二支节的长度 l_1、l_2。

解 （1）首先归一化$\overline{Y}_l = 1/\overline{Z}_l = 0.4 - j0.2$，在圆图上找到对应点，读取其电刻度为 0.463，如图 2-9-5 所示。

（2）求$\overline{Y}$、$\overline{Y}_a$及l_1 自$\overline{Y}_l$沿等$\varGamma$圆顺转$d_1/\lambda = 0.15$，读得$\overline{Y}_1 = 0.61 \sim 0.65$。由$\overline{Y}_1$点沿$g_1 = 0.61$圆（调节$l_1$）移动到辅助圆上，即得

$$\overline{Y}_a = 0.61 + j0.49$$

$$\overline{Y}_a' = 0.61 - j0.49$$

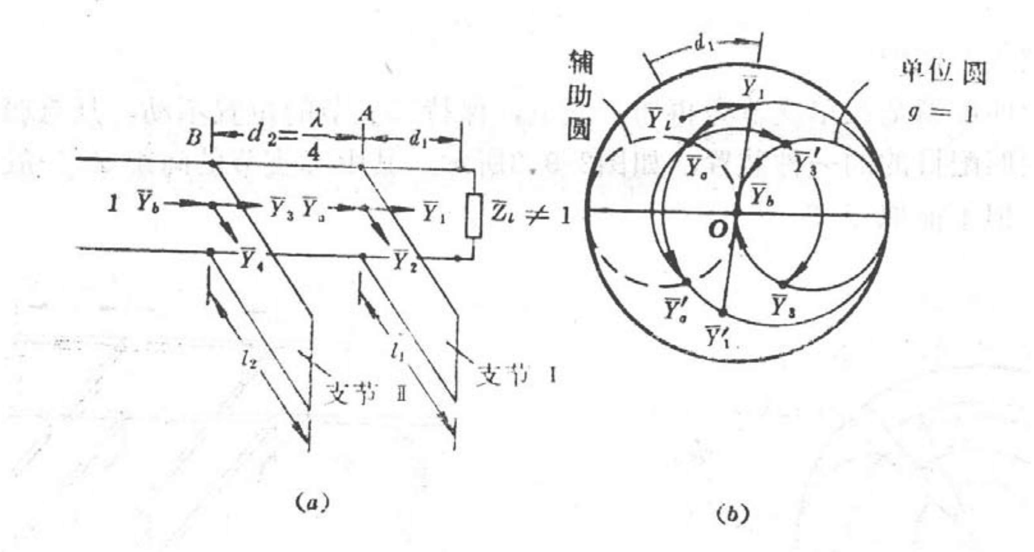


图 2-9-4 双支节匹配原理

图 2-9-4 双支节匹配原理

于是

$$\overline{Y}_2 = \overline{Y}_a - \overline{Y}_1 = -j0.16 \quad \text{电刻度为 0.475}$$

$$\overline{Y}_2' = \overline{Y}_a' - \overline{Y}_1 = -j1.14 \quad \text{电刻度为 0.365}$$

故得

$$l_1 = (0.475 - 0.25)\lambda = 0.225\lambda$$

$$l_1' = (0.365 - 0.25)\lambda = 0.115\lambda$$

（3）求$\overline{Y}_3$和l_2 由$\overline{Y}_a$沿等$\varGamma$圆顺转电刻度 0.25（即相对O点找到其对称点）交单位圆，读得$\overline{Y}_3 = 1 - j0.85$。同理由$\overline{Y}_a'$沿等$\varGamma$圆顺转 0.25，读

香 $\overline{Y}_3' = 1 + j0.85$。

于是

$$\overline{Y}_4 = \overline{Y}_b - \overline{Y}_3 = j0.85 \quad 电刻度为\ 0.156$$
$$\overline{Y}_4' = \overline{Y}_b' - \overline{Y}_3 = -j0.85 \quad 电刻度为\ 0.344$$

故得

$$l_1 = (0.156 + 0.25)\lambda = 0.406\lambda$$
$$l_1' = (0.344 - 0.25)\lambda = 0.09\lambda$$

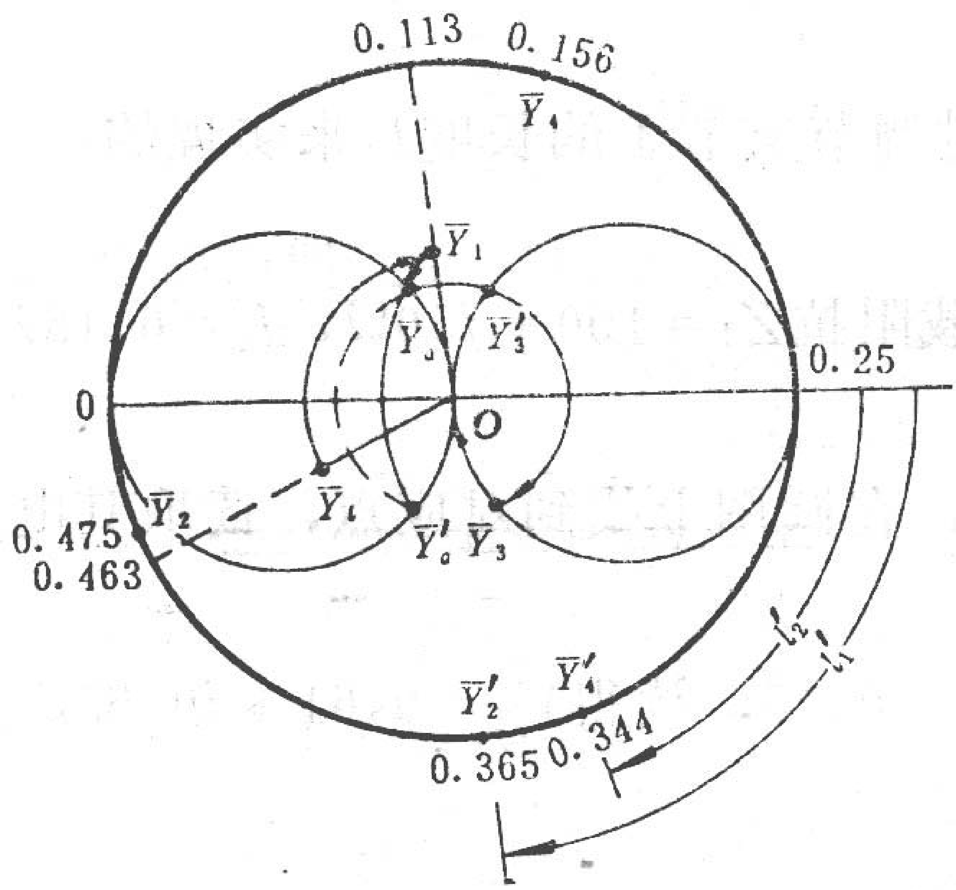


图 2-9-5 双支匹配例题

图 2-9-5　双支匹配例题

注：

①双支节匹配也得到两组解，为使匹配装置紧凑，通常亦选用较短的一组。本题则应选取 $l_1' = 0.115\lambda,\ l_2' = 0.09\lambda$，如图中标示的那样，一般选取支节长度较短的一组。

② d_2 取不同值，问题的解法相同，只是辅助圆的位置不同而已。d_2 为 $\lambda/8$ 和 $3\lambda/8$ 时，辅助圆的位置如图 2-9-6 所示。

③ d_2 不能取为 $\lambda/2$。若 $d_2 = \lambda/2$，根据 $\lambda/2$ 阻抗重复特性，则论第一支节长度 l_1 如何改变都不能使 $\overline{Y}_3 = \overline{Y}_a$，即起不到阻抗变换作用，达不到匹配目的。此时辅助圆与单位圆重合，改变 l_1 时，B 点沿等 g_1 圆移动不可能与单位圆相交，无法实现匹配。

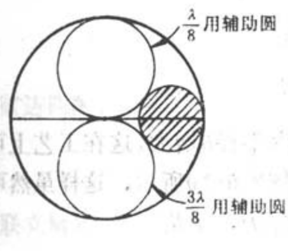
④当 $d_2 = \lambda/4$ 时，若 $g_1 > 1$，即 $\overline{Y}_1$ 落在 $g_1 > 1$ 的圆内，此时 $\overline{Y}_a$ 不可能与辅助圆相交，则不可能获得匹配；当 $d_2 = \lambda/8$、$3\lambda/8$ 时，若 $g_1 \geq 2$（图 2-9-6 中的阴影区）也不能匹配。这表明双支节不是对所有负载都匹配，而是存在着得不到匹配的“盲区”。

3．三支节匹配

为解决双支节区配存盲区的缺点，可采用三支或四支节匹配。

三支节匹配原理如图 2-9-7 所示。通常取 $d_2 = d_3 = \lambda/4$。匹配原理与双支一样，实用中只需用其中两个支节，具体用哪两个视负载阻抗值而定。

当 $d_2 = \lambda/4$ 时，若 $\overline{Y}_1$ 落在 $g = 1$ 圆内，用 l_1 和 l_2 二支节不行，可令 $l_1 = \lambda/4$，即不用第一支节，而用 l_2、l_3 可实现匹配。若 $\overline{Y}_1$ 未落入 $g = 1$ 圆内，则令 $l_3 = \lambda/4$，即不用支节 l_3，用支节 l_1、l_2 即可实现匹配。



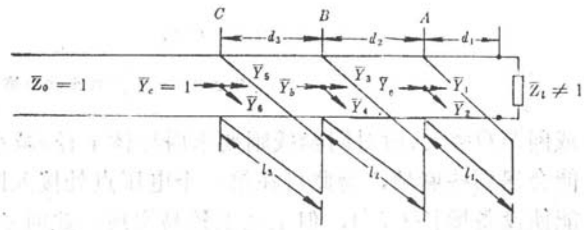


图 2-9-6　辅助圆位置　　　　图 2-9-7　三支节匹配示意图

二、线路间的阻抗匹配

这种匹配装置是在两段特性阻抗不同的均匀传输线之间或在主传输线和负载之间级联一段传输线构成的。这里主要介绍$\lambda/4$阻抗变换器和渐变线两种，下面分述之。

1．$\lambda/4$阻抗变换器（又称$\lambda/4$匹配线）

（1）当$Z_l=R_l$（即终端接纯阻性负载）时

此时可直接在传输线与负载之间加一段特性阻抗为Z_{01}的$\lambda/4$的线段，只要适当选择Z_{01}就可实现主传输线的匹配，如图 2-9-8 所示。

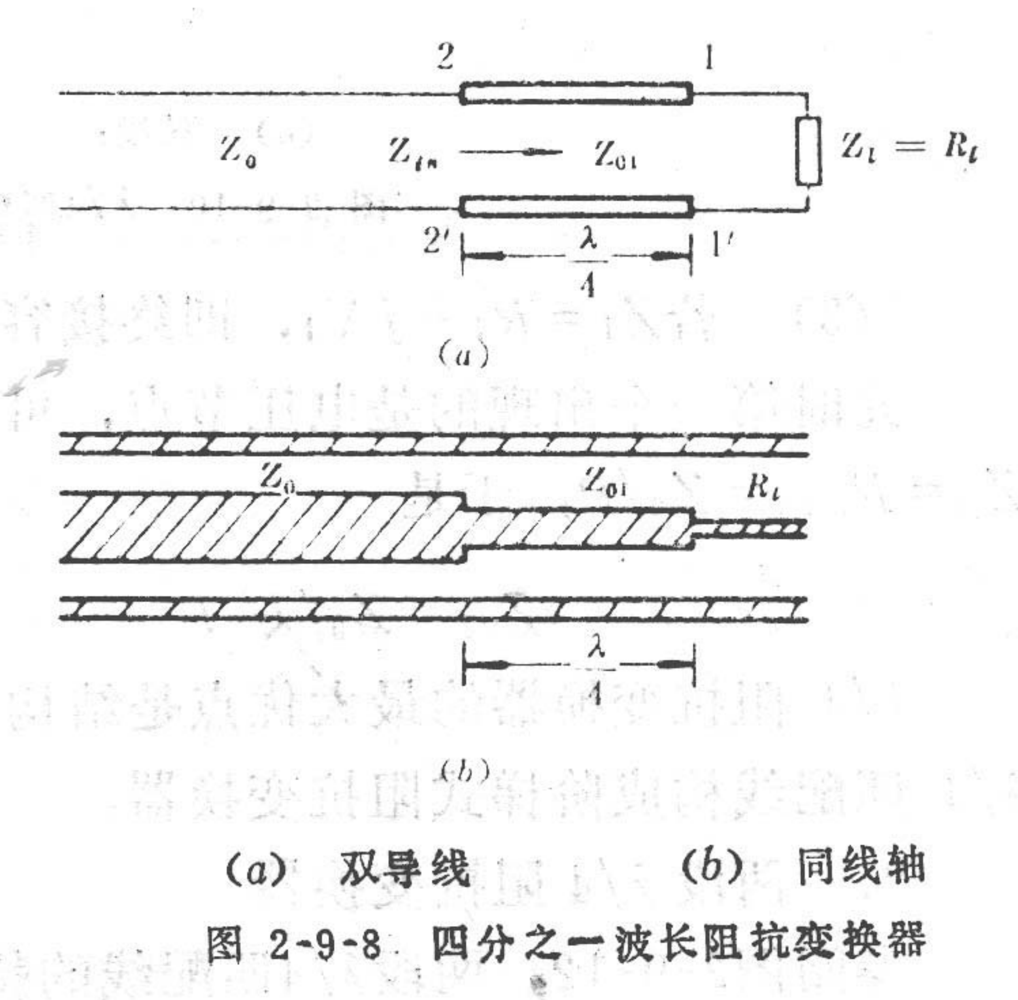


图 2-9-8 四分之一波长阻抗变换器

将 $Z_l = R_l$、$l = \lambda/4$ 代入式（2-3-21）中，可求得 $\lambda/4$ 匹配线的输入阻抗为

$$Z_{in} = Z_{01}^2 / R_l$$

欲使主传输线匹配，须使 $Z_{in} = Z_0$。于是得到

$$Z_{01} = \sqrt{Z_0 \bullet R_l} \qquad (2\text{-}9\text{-}1)$$

（2）若 $Z_l = R_l + jX_l$，即终接感性复阻抗时

此时匹配线段不能直接跟负载相接，而应选择主线上呈现纯电阻的地方。由§2-5我们知道，距感性复阻抗首先出现的是电压波腹点，由此接入$\lambda/4$匹配线可使设备长度最短，如图 2-9-9 所示。此时$Z_A = R_{\max} = \rho Z_0$，于是

$$Z_{01} = \sqrt{Z_0 \bullet R_{\max}} = \sqrt{\rho} Z_0 \tag{2-9-2}$$

由式（2-9-2）可知，匹配段的特性阻抗$Z_{01} > Z_0$，对双线则要求其导线直径d变小或间距D增大，而对同轴线则要求内导体半径a减小或外导体内半径**b**增大，这在工艺上可能会遇到些麻烦，为此可在第一个电压点处接入匹配段，如图2-9-10所示，这样虽然可能使设备增长了$\lambda/4$，但工艺上较易实现。此时$Z_A = R_{\min} = Z_0/\rho$，于是

$$Z_{01} = Z_0/\sqrt{\rho} \tag{2-9-3}$$

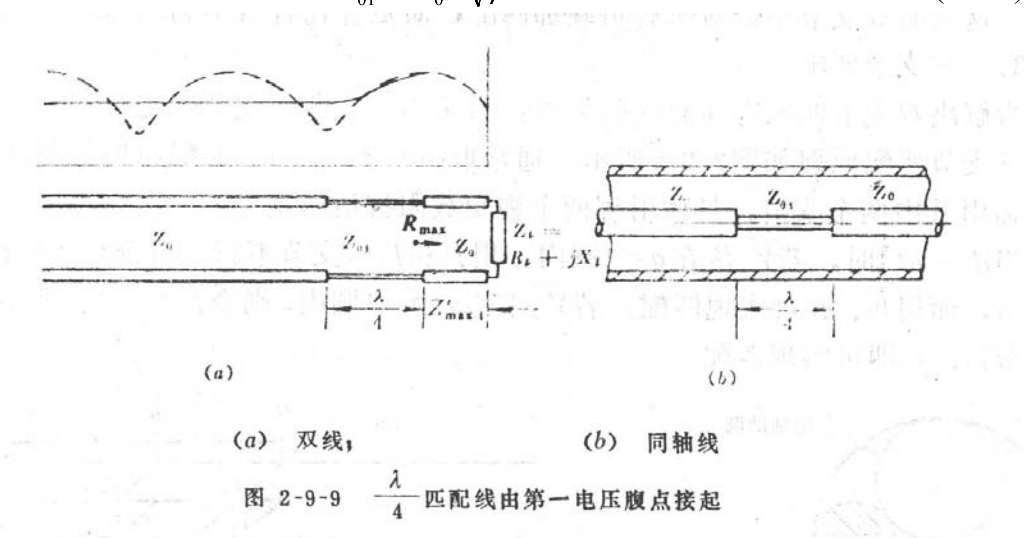
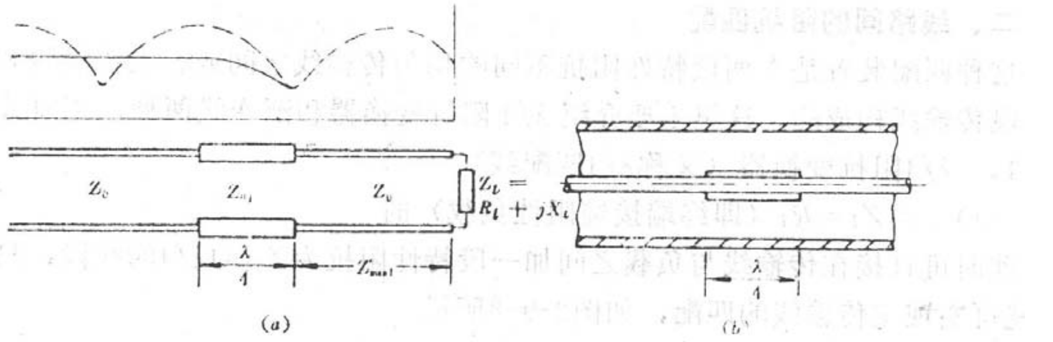


图 2-9-9 $\lambda/4$匹配线由第一电压腹点接起



（a） 双线； （b） 同轴线

图 2-9-10 λ/4匹配线（由第一电压节点接起）

图 2-9-10　$\lambda/4$ 匹配线（由第一电压节点接起）

（3）若 $Z_l = R_l - jX_l$，即终接容性复阻抗时

此时第一个出现的是电压节点，可在此处接入匹配线，如图 2-9-11 所示。此时 $Z_A = R_{\min} = Z_0/\rho$，于是

$$Z_{01} = Z_0/\sqrt{\rho}$$

$\lambda/4$ 阻抗变换器的最大优点是结构简单，缺点是频带太窄。为此可利用两段或多段 $\lambda/4$ 匹配线构成阶段式阻抗变换器。

2．两段 $\lambda/4$ 阻抗变换器

参阅图 2-9-12，两段 $\lambda/4$ 匹配线的特性阻抗 Z_{01}、Z_{02} 应满足下列关系

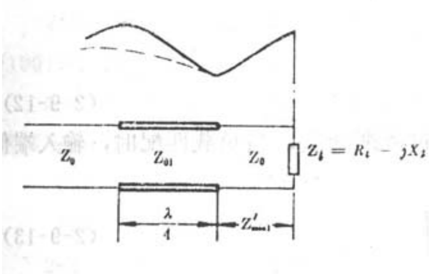


图 2-9-11 终接容性复阻抗时

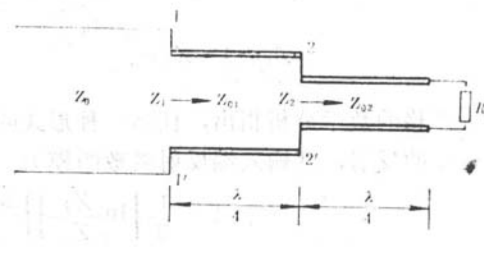


图 2-9-12 双节λ/4匹配线

图 2-9-11　终接容性复阻抗时　　　　图 2-9-12　双节 $\lambda/4$ 匹配线

$$Z_1=\frac{Z_{01}^2}{Z_2},\quad Z_2=\frac{Z_{02}^2}{R_l} \tag{2-9-4}$$

同时，为获得较宽频带，应使每段$\lambda/4$线的阻抗变比都不过大。现设两段的阻抗变比相同，即

$$\frac{R_l}{Z_2}=\frac{Z_2}{Z_1} \tag{2-9-5}$$

欲达匹配，须使$Z_1=Z_0$，于是上式变为

$$\frac{R_l}{Z_2}=\frac{Z_2}{Z_0} \tag{2-9-6}$$

联立解式（2-9-4）、（2-9-6）可得

$$Z_{01}=\sqrt[4]{\frac{R_l}{Z_0}}\bullet Z_0 \tag{2-9-7}$$

$$Z_{02}=\sqrt[4]{\frac{Z_0}{R_l}}\bullet R_l \tag{2-9-8}$$

2．指数线阻抗匹配器

指数线阻抗匹配器是一种特性阻抗沿线按指数规律分布的变戴面传输线，它介于主传输线与电抗必负载阻抗之间，是一种宽频带阻抗变换器。这种阻抗匹配器可通过改变线间距离或导线之直径来制成，如图 2-9-13 所示。

假设指数上任一点的特性阻抗为

$$Z_0(z)=Ae^{mz} \tag{2-9-9}$$

式中，A、m 为待定常数，需根据边界条件加以确定。这些边界条件是：

①当$z=0$时，$Z_0(0)=Z_0$，代入上式得

$$Z_0(0)=Z_0=A \tag{2-9-10}$$

②当$z=l$时，$Z_0(l)=Z_l$代入式（2-9-9）有

$$Z_0(l)=Z_l=Z_0e^{ml}$$

此此解得

$$m=\frac{1}{l}\ln\frac{Z_1}{Z_0} \tag{2-9-11}$$

将式（2-9-10)、（2-9-11）代入式（2-9-9）中可得

$$Z_0(z)=Z_0e^{\frac{z}{l}\ln\frac{Z_l}{Z_0}} \tag{2-9-12}$$

严格的数学分析指出，任何一种形式的均匀过度渐变线，当负载匹配时，输入端仍有一定的反射，其输入端反射系数的模为

$$\left|\Gamma_{in}\right|=\frac{1}{2}\left|\ln\frac{Z_l}{Z_0}\right|\left|\frac{\sin\beta l}{\beta l}\right| \tag{2-9-13}$$

根据式（2-9-13）可绘出$\left|\Gamma_{in}\right|$与$1/\lambda$的关系曲线，如图 2-9-14 所示。

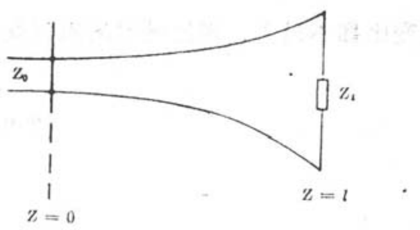


图 2-9-13 指数式渐变线

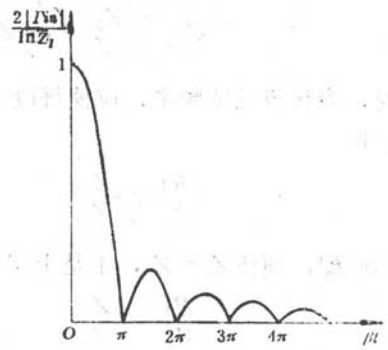


图 2-9-14 指数线输入反射系数

图 2-9-13 指数式渐变线　　图 2-9-14 指数线输入反射系数

由图可见，当$l>\lambda/2$时，$2\left|\Gamma_{in}\right|/\left|\ln Z_l/Z_0\right|<0.2$，$l$越长，$\left|\Gamma_{in}\right|$越接近于零；当$l=n\lambda/2$时，$\left|\Gamma_{in}\right|=0$。

如果所要匹配的阻抗Z_0、Z_l相差不大，指数线可做成直线过渡段，以便于加工。